INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 13-14: Aplicaciones de la integral

1. Calcular el área de la región limitada por $y^2 = x + 4$ y $x + y - 2 = 0$.

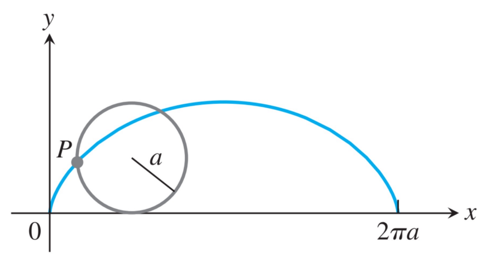
   a) Respecto de x.

   b) Respecto de y.

2. Calcular la longitud de arco de las siguientes curvas:

   a) La *cicloide* cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por:

   $$x(t) = a(t - \operatorname{sen}(t)), \qquad y(t) = a(1 - \cos(t)), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$



   b) La curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x(t) = \dfrac{1}{3}(2t+3)^{3/2}, \quad y(t) = t + \dfrac{t^2}{2}, \quad 0 \le t \le 3.$

   c) Calcula la longitud de arco para $y = \ln(\cos(x))$, con $x \in [0, \pi/4]$.

   d) La curva dada por: $y = \dfrac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}, \quad 0 \le x \le 3.$

   e) La curva dada por: $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{1}{8x^2}, \quad 1 \le x \le 2$. (Sugerencia: $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ es un cuadrado perfecto).

3. Obtener el volumen del sólido que se genera al girar la siguiente región alrededor del eje x:

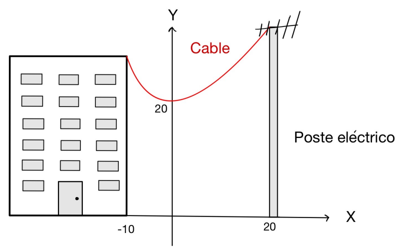
   a) $y = \sqrt{\cos(x)}, \qquad x = 0, \qquad y = 0, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

   b) $y = \sec(x), \qquad y = 0, \qquad x = -\frac{\pi}{4}, \qquad x = \frac{\pi}{4}.$

4. Calcular el volumen de un vaso que tiene forma de un cono truncado, si se sabe que mide 12 cm de altura, el diámetro superior es de 8 cm y el inferior es de 5 cm.

5. Considera la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Calcula su perímetro.

6. La compañía de luz va a colocar un cable del poste eléctrico a un edificio. El cable en su punto más bajo debe librar 20m, la catenaria que describe el cable es $y = \dfrac{c}{2}\left(e^{x/c} + e^{-x/c}\right)$. Calcula la longitud máxima de cable que pueden usar. Sugerencia, determina primero el valor de c.



7. Considera la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Calcula su perímetro.

8. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ x\ln(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

   a) Verificar que f es continua en $x = 0$, es decir, calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x)$.

   b) Hacer un bosquejo de la gráfica de f.

   c) Calcular el volumen del sólido que se genera al girar, en torno al eje x, la región acotada por la gráfica de f y el eje x.

9. Sea $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y cálcula su área.

   a) Grafica el astroide.

   b) Cálcula su área.

   c) Calcula la longitud de cada uno de los cuatro segmentos curvos que forman el astroide.

   d) Considera que las ecuaciones paramétricas del astroide dado son: $x(t) = \cos^3(t)$ y $y(t) = \operatorname{sen}^3(t)$. Resuelve nuevamente el inciso anterior y compara.

10. *Trompeta de Torricelli.* Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$, muestra que el volumen y la superficie de revolución, dadas por las siguientes fórmulas

$$V = \pi \int_1^{\infty} [f(x)]^2\, dx \qquad \text{y} \qquad S = 2\pi \int_1^{\infty} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\,,$$

es finita e infinita, respectivamente. Haz un bosquejo de la figura producida al revolucionar la imagen de $f(x)$ respecto al eje de las abscisas e interpreta el resultado previamente mostrado.

Cazuelazo semanal.

- Considera la *espiral de Cornu* (Busca su gráfica en internet):

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}s^2\right) ds, \qquad y(t) = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}s^2\right) ds.$$

  1. Muestra que $x(t) = -x(-t)$ y $y(t) = y(-t)$.
  2. Encuentra su longitud para un intervalo arbitrario $[-T, T]$.
  3. Muestra que su longitud diverge o converge cuando $T \to \infty$.

- Sea la función continua

$$f(x) = \begin{cases} x^m \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & 0 < x \leq \dfrac{1}{2\pi} \text{ y } m \in \mathbb{N}, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

  Muestra que la integral, conocida como *longitud de arco*,

$$L = \int\limits_0^{1/(2\pi)} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x$$

  existe, si $m = 2$, pero cuando $m = 1$, no existe.