INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 15: Polinomios de Taylor, residuos y aproximaciones.

1. Encuentra el polinomio de Taylor de grado 2 para

   a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, evalúa en $x_0 = 0$.

   b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$, evalúa en $x_0 = 1$.

   c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, evalúa en $x_0 = 1$.

   d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{ds}{s+1}$, evalúa en $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

   e) $f(x) = 3 + \displaystyle\int_2^{2x} e^{t^2-4}\, dt$, $x_0 = 1$.

2. En cada inciso, obtén el polinomio de Taylor de grado n generado por $f(x)$ en x_0:

   a) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$.

   b) $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, $x_0 = 0$.

   c) $f(x) = x^2 - x - 2$, $x_0 = -1$.

3. Muestra que si $f(x)$ es una función impar, entonces los coeficientes pares de su polinomio de Taylor son nulos. Encuentra entonces el polinomio de Taylor de grado 5 para $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

4. Aproximar:

   a) $\sqrt[3]{e^2}$ con un error menor a 0.001.

   b) $\ln(5/4)$ con un error menor a 0.01.

   c) $\cosh(0.1)$ con su polinomio de Taylor de grado 4. Recuerda que $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ es una función par.

5. A partir del polinomio de Taylor de orden n para e^x en $x_0 = 0$ determina el polinomio de Taylor de grado 3 generado por las siguientes funciones $f(x)$ en $x_0 = 0$:

   a) $f(x) = e^{-2x}$.

   b) $f(x) = e^{-x^2}$.

   c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

6. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 generado por $f(x) = \arctan(x)$ en $x_0 = 0$, y úsalo para aproximar el valor de $\pi/4$.

7. Determina la exactitud de la aproximación

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

   sobre el intervalo $[-1, 1]$.

8. Usando el teorema de Taylor, demuestra que

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| < \frac{1}{6}, \quad \forall x \in [0,1] \,.$$

9. Sean $P_3(x)$ un polinomio de Taylor de grado tres y $R_3(x)$ una función tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0 \,.$$

Escribe a la función $f(x) = e^{2x}$ de tal modo que $f(x) = P_3(x) + R(x)$ y usa este resultado para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{2x} - 2x^3 - 2x^2 - x}{x^4} \,.$$

10. Encuentra el polinomio de Taylor $P_n(x)$ en $x_0 = 0$ y su residuo $R_n(x)$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \,, \\ 1 & x = 0 \,. \end{cases}$$

Demuestra que $f^{(2k+1)}(x_0) = 0$, $f^{(2k)}(x_0) = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ para todo natural $k = 0, 1, \ldots, n-1, n$ y estima el valor de $\displaystyle\int_0^1 f(u)\, du$ con $n = 3$.

11. Con ayuda de una computadora, grafíca sucesivamente los polinomios de Taylor de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y observa su convergencia a través de las gráficas en el intervalo $[-2, 2]$.

Cazuelazo semanal.

- Muestra que $x^2\left(1 - \dfrac{x^4}{6}\right) < \operatorname{sen}\left(x^2\right)$ para todo $x \in (0, \sqrt{\pi})$.