INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 12: Integrales impropias

1. Muestra que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$. Ahora justifica si la siguiente igualdad es válida:
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^\infty \frac{dx}{x} - \int_1^\infty \frac{dx}{x-1}.$$

2. Determina para qué valores de p converge la integral en cada inciso:

   a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

   b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

3. a) Demuestra que
$$\int \frac{1}{2e^x - e^{2x}}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{4}\ln|2-e^x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

   b) Usando el inciso anterior, calcula
$$\int_{\ln 3}^\infty \frac{1}{2e^x - e^{2x}}dx.$$

4. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

   a) Determina el dominio D de f y justifica que $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$ es una integral impropia.

   b) Demuestra que
$$\lim_{\alpha \to 2^+} \frac{1}{\pi}\int_{4-\alpha}^{2\alpha} f(x)dx = 1.$$

5. Si las siguientes integrales convergen, calcúlalas:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1.2}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{(x-1)^{1.5}}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,dx$

   e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+5x)}$.

   f) $\displaystyle\int_{\ln(2)}^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}}dx$.

   g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$.

   h) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\,dx$.

   i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |x|\,e^{-x^2}dx$.

   j) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-3|x-2|}\,dx$.

   k) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)dx$.

   l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\operatorname{sen}(x)}$.

   m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$.

   n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{1-r^4}}dr$.

   ñ) $\displaystyle\int_1^{\cosh(t)} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, $t \geq 0$.

$o)$ $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}.$ $p)$ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$ $q)$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\arctan(x))}.$

Cazuelazo semanal.

- Sea f una función continua y considera que $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge. Muestra que para todo $x > a$ se satisface

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^\infty f(t)\,dt.$$

  Usa esto para mostrar que $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^\infty f(t)\,dt = -f(x).$

- La definición según Legendre de la función Gama está dada por $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,.$

  1. Encuentra los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $\Gamma(x)$ está definida, es decir, la integral es convergente.
  2. Muestra que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y que si $x = n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n+1) = n!$.
  3. Deduce las siguientes representaciones:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}\,du \quad \text{y} \quad \Gamma(x) = \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{x-1}\,du\,.$$

  4. Muestra que si $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(ax^b\right) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-n+1)}ax^{b-n}$$

  y, si suponemos que $n = 1/2$, prueba que se obtiene la *derivada fraccionaria de orden 1/2* de la función $y = x^2$ dada por

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}}\left(x^2\right) = \frac{8\sqrt{x^3}}{3\sqrt{\pi}}\,.$$

  Ayuda: considera que $\Gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi}$.