INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 11: Integración por fracciones parciales

1. Usando

   a) $u = \sqrt{x}$, calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\,dx$

   b) $u = \sqrt{x^2+1}$, calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

2. Considerando $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, evalúa $\displaystyle\int \frac{dx}{x - x^{r+1}}$ al tomar inicialmente la sustitución $u = x^r$. Después usar fracciones parciales.

3. Considera como válida la fórmula de reducción

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

   para evaluar $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

4. Sea la integral indefinida

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}\,.$$

   a) Si $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, usa las identidades de doble ángulo y/o medio ángulo para demostrar que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{y} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,.$$

   b) Encuentra los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que, bajo el cambio de variable del inciso anterior, se satisface que

$$I = -2\int \frac{du}{(u-a)(u-b)}\,.$$

   c) Finalmente, demuestra que se satisface que

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - b}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - a}\right| + C\,, \quad \text{donde } C \in \mathbb{R}\,.$$

5. Encuentra todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ de tal modo que se satisface la ecuación

$$\int_a^{2^{1/6}} \frac{du}{u^7 - u} = \frac{1}{6}\,.$$

6. Integrar:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4+9}{x^4+9x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}\,dt$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}(x)-6}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+8x+4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^4-4x^3+2x^2-3x+1}{(x^2+1)^3}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{3x^3-3x^2+5x+3}{1-x^4}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x^4-4x^3+2x^2-3x+1}{(x^2+1)^3}\,dx$

Cazuelazo semanal.

- Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$. Sugerencia: $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)$.

- A partir de la relación de correspondencia

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{du}{u(1-2u)(1-u)}\,,$$

por medio del método de fracciones parciales, demuestra que para todo $y_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$, se tiene que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)=\frac{1}{2}$.