INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 10: Integración por sustitución trigonométrica

1. Calcula la familia de primitivas de la función $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$.

2. Demuestra que el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a, b > 0$, está dada por $A_e = \pi ab$.

3. Encuentra el valor de $a > 0$ tal que, si $f(x) = \dfrac{x-3}{2x}$, entonces el valor de la integral

$$I = \int_1^a \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

4.
   a) Demuestra que

   $$g(x) = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0,$$

   es una primitiva de

   $$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

   b) Usa el resultado de (a) para calcular

   $$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

5.
   a) Usa integración por partes para demostrar que

   $$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

   b) Calcula el valor de la última integral, utilizando sustitución trigonométrica.

6. Determina las siguientes integrales, usando una sustitución trigonométrica (y su triángulo):

   a) $\displaystyle\int x \operatorname{arc\,sen}(x)\, dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$

   c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$

   d) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arc\,sen}(x)\, dx$

   e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$

   f) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx$

   g) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + 9}}\, dt$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}$

k) $\displaystyle\int_{1/12}^{1/4} \frac{2}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}\,dt$

l) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^2},\ a\neq 0$

m) $\displaystyle\int x^3\sqrt{a^2x^2-b^2}\,dx$

Cazuelazo semanal.

- Prueba que, para toda $n \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{\operatorname{sen}^n(x)+\cos^n(x)}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$