

INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 9: Integración por partes e integrales trigonométricas

1. Muestra que $\int [\ln(x)]^n dx = x[\ln(x)]^n - n \int [\ln(x)]^{n-1} dx$. Escribir la integral como una suma de potencias de x y de $\ln(x)$.

2. Demuestra que $\int_a^b \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx = \int_a^b (x-a) f(x) dx$.

3. a) Sea f diferenciable e invertible. Demuestra que

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - \int f(y) dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x).$$

b) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \arccos(x) dx$, (ii) $\int \log_2(x) dx$.

4. Deduce la fórmula

$$\int \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}((n+m)x)}{n+m} + \frac{\operatorname{sen}((n-m)x)}{n-m} \right] + C, & n \neq m, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2n} + x \right] + C, & n = m, \end{cases} \quad \text{donde } C \in \mathbb{R}.$$

5. Demuestra la siguiente fórmula de reducción de grado:

$$\int \tan^n(x) dx = \begin{cases} \ln |\sec(x)| + C, & n = 1, \\ \frac{1}{n-1} \tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x) dx, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad \text{donde } C \in \mathbb{R}.$$

6. Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ y $\int_0^1 f(u) du = 4$. Calcular el valor de $I = \int_0^1 u^2 f''(u) du$.

7. Sea $I_n = \int_0^1 u^n \operatorname{sen}(\pi u) du$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Muestra que se satisface la relación de recurrencia

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n \quad \text{y calcula el valor de } \int_0^1 u^4 \operatorname{sen}(\pi u) du.$$

8. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int x^n \ln(x) dx$, para $n > 0$

b) $\int [\ln(x)]^3 dx$

c) $\int x e^{-kx} dx$, con k constante

d) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2(x) dx$

e) $\int_1^x t^2 [\ln(t)]^2 dt$, para $t > 0$

f) $\int x 3^x dx$

g) $\int \arcsen(3x) dx$

h) $\int e^{2\theta} \sen(3\theta) d\theta$

i) $\int \sen(\ln(x)) dx$

j) $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx$

k) $\int \sec^3(x) dx$

l) $\int \cos^2(\sqrt{y}) dy$

m) $\int \sen^2(3z) \cos^2(3z) dz$

n) $\int \sinh^3(x) \cosh^2(x) dx$

ñ) $\int \tan^5(2w) \sec^4(2w) dw$

o) $\int \frac{\sen(x)}{1 + \sen(x)} dx$

p) $\int \csc^3(x) dx$

q) $\int \cot^5(y + 1) dy$

r) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} dx$

Cazuelazo semanal.

- Calcula el área de la región dada por el intervalo $[a, b]$, donde $0 < a < b$ y la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

- Encuentra el valor del área positiva dada por la integral definida $A = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{u^3 \arcsen(u^2)}{\sqrt{1-u^4}} du$.