

Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2024

Laboratorio 7: Aproximaciones Lineales y Cuadráticas

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = xy - z^2 + e^{x-2z}$. Encuentra la aproximación lineal y la aproximación cuadrática de f en el punto $(2, 0, 1)$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. De la función f se conoce la siguiente información: $f(-1, 2) = 3$, las derivadas direccionales de f en $(-1, 2)$ en las direcciones de los vectores $\vec{v}_1 = (1, -1)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1)$ son 2 y 4 respectivamente. Encuentra la aproximación lineal de f en el punto $(-1, 2)$. ¿Qué aproximación a $f(-3/2, 3/2)$ da la aproximación lineal anterior?
3. Si $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^1 , la aproximación lineal de \mathbf{F} en el punto \vec{x}_0 se define como la función $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\mathbf{L}(\vec{x}) = \mathbf{F}(\vec{x}_0) + \mathbf{DF}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$, donde \vec{x}_0 , \vec{x} y $\mathbf{F}(\vec{x}_0)$ son vectores columna. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy - z, z^2 - x)$. Encuentra la aproximación lineal de \mathbf{F} en el punto $(2, 3, 1)$.
4. (Método de Newton) Un sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\&\dots \\f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0.\end{aligned}$$

Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$. Entonces, el sistema de ecuaciones se escribe como

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \vec{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

Para aproximar un vector solución del sistema de ecuaciones, el *método de Newton* usa una aproximación inicial $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, para luego generar una nueva aproximación $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ que se obtiene como sigue: Si $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la aproximación lineal de \mathbf{F} en el punto \vec{x}_0 , entonces \vec{x}_1 satisface $\mathbf{L}(\vec{x}_1) = \vec{0}$. Suponiendo que \mathbf{F} es diferenciable en \vec{x}_0 y que $\mathbf{DF}(\vec{x}_0)$ es invertible, demuestra que \vec{x}_1 está dado por

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - (\mathbf{DF}(\vec{x}_0))^{-1}\mathbf{F}(\vec{x}_0).$$

Nota: Para obtener una siguiente aproximación \vec{x}_2 , se reemplaza \vec{x}_0 por \vec{x}_1 en la ecuación anterior. La fórmula de Taylor de orden 1 se usa para mostrar que bajo ciertas hipótesis, el método de Newton converge muy rápido (convergencia cuadrática).

5. Considera el sistema de ecuaciones

$$x^2 - \cos(x - 2y) - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^3 - xy^2 + 1 = 0. \quad (2)$$

Si $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (2, 1)$ es una aproximación inicial a un vector solución del sistema de ecuaciones, encuentra la siguiente aproximación dada por el método de Newton.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Los puntos críticos (o estacionarios) de f son las soluciones del sistema de n ecuaciones con n incógnitas $\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \vec{0}$. En muchos problemas prácticos no es posible resolver el sistema de manera analítica por lo que se usan algoritmos para aproximar los puntos críticos. Si \vec{x}_0 es una aproximación inicial a un punto crítico, demuestra que el método de Newton aplicado al sistema $\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \vec{0}$ produce una siguiente aproximación \vec{x}_1 dada por $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - (H_f(\vec{x}_0))^{-1} \nabla f(\vec{x}_0)$, donde $H_f(\vec{x}_0)$ es la *matriz hessiana* de f en \vec{x}_0 .