Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2024

Laboratorio 5: Gradientes y Derivadas Direccionales

1. Un algoritmo muy usado en el entrenamiento de redes neuronales artificiales que aparecen en el *aprendizaje profundo* de Inteligencia Artificial, es el llamado método de *Descenso de Gradiente*, con el cual se busca aproximar un vector $\vec{z}$ donde una función diferenciable de varias variables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alcanza su mínimo (suponiendo que exista). En su versión más sencilla, el método procede de la siguiente forma: Se propone un vector $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ como aproximación inicial al vector $\vec{z}$; dicho vector se puede dar de manera aleatoria. Después se calcula una nueva aproximación $\vec{x}_1$ de tal manera que $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ apunta en la dirección del vector $-\nabla f(\vec{x}_0)$, es decir, en la dirección de máximo descenso de f a partir de $\vec{x}_0$. Entonces, $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \alpha \nabla f(\vec{x}_0)$ para algún escalar $\alpha > 0$ apropiado. Luego se calcula una nueva aproximación $\vec{x}_2$ dada por $\vec{x}_2 = \vec{x}_1 - \alpha \nabla f(\vec{x}_1)$, etc.

   Usa el método de *descenso de gradiente* en el siguiente problema: si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y, z) = x^2 + 2z^2 + 4y^2 + 4yz - 2x - 2z + 1$, y si $\vec{x}_0 = (1, -1, 2)$ es la aproximación inicial a un vector donde f alcanza su mínimo, calcula la siguiente aproximación $\vec{x}_1$ tomando $\alpha = 1/10$.

2. La distribución de temperaturas (en grados Celsius) sobre la superficie de un lago de aguas termales está dada por la función $T(x, y) = (-x^2 - 2y^2 + xy)/3 + 50$, para $x \in [-8, 8]$, $y \in [-4, 4]$ en coordenadas rectangulares. Un pato se encuentra en el punto $(6, -3)$ sobre el lago. ¿En qué dirección sobre la superficie del lago debe comenzar a nadar el pato si desea seguir la dirección de máximo descenso de la temperatura?

3. Sea S la superficie en el espacio xyz dada por la ecuación $e^{x+2z} + z^2 = xyz + 4$.

   (a) Encuentra un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$ que sea normal a S en el punto $(2, 1, -1)$.

   (b) Encuentra la ecuación del plano tangente a S en el punto $(2, 1, -1)$.

4. (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) Sea g la función definida por $g(x, y, z) = 3x^2y + z$ para cualesquiera x, y, z reales. ¿Cuál de los siguientes números es el más cercano al valor exacto de la derivada direccional de g en el punto $(0, 0, \pi)$ en la dirección del vector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$? (Nota: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores de la base canónica en $\mathbb{R}^3$ $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente.)
   A) 0.2 B) 0.8 C) 1.4 D) 2.0 E) 2.6

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - 3xy + 2xy^2$. Sea γ la curva de nivel de f que pasa por el punto $(2, -2)$. Encuentra un vector no nulo en $\mathbb{R}^2$ que sea perpendicular a dicha curva en el punto $(2, -2)$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a γ en el punto $(2, -2)$ en la forma $y = mx + b$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(2,1) = -4$ y $\nabla f(2,1) = (3,4)$. Dada la curva en el plano xy descrita por la ecuación $x^2y + f(x,y) = 0$, encuentra un vector tangente a dicha curva en el punto $(2,1)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Suponer que γ es una curva de nivel de f que puede ser parametrizada por una trayectoria de clase C^1, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, y tal que en t_0 se cumple que $\mathbf{c}'(t_0) \neq (0,0)$, con $\mathbf{c}(t_0) = (x_0, y_0)$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector $\mathbf{c}'(t_0)$?

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes . Supongamos que en un punto (x_0, y_0) se conocen los valores de las derivadas direccionales de f en las direcciones de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Describe cómo encontrar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto (x_0, y_0) usando los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y las derivadas direccionales respectivas de f en (x_0, y_0).

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = x^2 - 3xyz + z,^3 y - 1$. Encuentra la dirección en la que f crece más a partir del punto $(2,1,-1)$. ¿Cuál es el valor de la máxima razón de crecimiento en dicho punto?

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - \dfrac{y^2}{4}$. Muestra que no existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que la derivada direccional de f en el punto $(1/2, 2)$ en la dirección de $\vec{v}$ sea 4.