INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 8: Formas indeterminadas

1. Justifica si el límite en cada inciso es, o no, una forma indeterminada. Luego calcula, si existe, el límite:

   a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

   b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$

   c) $\lim_{a\to 1} \dfrac{x^{1-a}-1}{1-a}, \quad x>0$

   d) $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}$

   e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

   f) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2^x+4^x}{5^x-2^x}$

   g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x xe^{-t^2}dt}{1-e^{-x^2}}$

   h) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

   i) $\lim_{x\to \infty} \left[\ln\Big(1+6x\Big)-\ln\left(4+3x\right)\right]$

   j) $\lim_{x\to \infty} \Big(2\sqrt{x}\big[\pi-2\arctan(\sqrt{x})\big]\Big)$

   k) $\lim_{x\to \infty} \Big[x-\ln\big(3e^x+1\big)\Big]$

   l) $\lim_{x\to 0^+} \Big(\operatorname{sen}(x)\Big)^{\cot(x)}$

   m) $\lim_{x\to 0^+} \Big(1+2x\Big)^{\frac{1}{\ln x}}$

   n) $\lim_{x\to 0} \left[\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]^{1/x^2}$

   ñ) $\lim_{x\to \infty} \left[\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]^{1/x^2}$

   o) $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x, \qquad a>0, b>0$

2. Sin utilizar la regla de L'Hôpital prueba que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1 \quad \text{(cambia la variable).}$$

3. Deduce cuál es el valor de la constante c tal que se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{cx}{cx+1}\right)^x = \pi.$$

4. Determina el valor de $a \in \mathbb{R}^+$ de modo que

$$\lim_{x\to 0} \left[1+\int_0^{2x} \cosh\big(t^2+\ln(a)\big)\, dt\right]^{1/x} = e^{5/2}.$$

5. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\int_0^{1/x} f(t)\ dt\right)^x = e^{f(0)}.$$

6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Determina todos los valores de a y b de tal modo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{ax-\operatorname{sen}(x)}\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{b^2+u}}\,du = e\,.$$

Cazuelazo semanal.

- Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]\,.$$

- Supongamos que se tiene una masa suspendida por una cuerda y es sujeta a una fuerza de vibración periódica. El desplazamiento al tiempo t está dado por

$$y(t) = \frac{g}{\omega_1^2-\omega_2^2}\left(\operatorname{sen}(\omega_1 t)-\operatorname{sen}(\omega_2 t)\right)\,,$$

  donde g es la aceleración de la gravedad y $\omega_{1,2}$ son dos frecuencias de vibración distintas. Determina la posición de la masa para todo $t>0$ cuando $\omega_1-\omega_2\to 0$.