INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 5: Funciones inversas y exponencial natural

1. Derivar:

   a) $f(x) = (\sqrt{x})^{x^x}$ *b*) $g(x) = x^{2x}\, e^{x^{\cos(x)}}$ *c*) $h(x) = x^{\sqrt{x}}\, x^{\ln(x)}, \;\; x > 0.$

2. Encuentra la inversa, su dominio e imagen de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = -8x^3 - 2$
   b) $g(x) = \sqrt{x+2}$
   c) $h(x) = \dfrac{3x+5}{x-4}$
   d) $y = \ln(5-3x)$.

3. Sean f y g funciones invertibles.

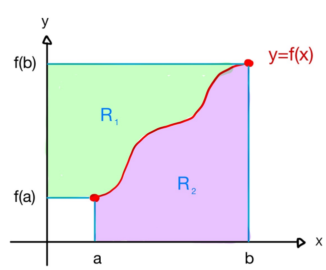
   a) Muestra que $g \circ f$ es invertible y que se satisface $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
   b) Si $f(x) = -x$, entonces muestra que $(g \circ f)^{-1}(x) = -\, g^{-1}(x)$.

4. Sea f una función invertible, con inversa f^{-1}, y sea $g = \dfrac{1}{f^{-1}}$. Si $f(2) = -3$ y $f'(2) = \dfrac{2}{3}$, encuentra $g'(-3)$.

5. Sea la función $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3$.

   a) Muestra que $f(x)$ es invertible en todo su dominio.
   b) Sea $g(x) = f\left(x^{10} + x^2 + 1\right) - f^{-1}(x)$. Encontrar el valor de $g'(3)$.

6. Sea $0 \leq a < b$ y f no negativa, creciente y continua en $[a, b]$ de modo que f^{-1} existe. Ver la gráfica.



   a) Muestra que $A_1 + A_2 = bf(b) - af(a)$, donde A_1 y A_2 son respectivamente las áreas de R_1 y R_2.
   b) Usa el inciso anterior para mostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\, dy.$
   c) Evalúa $\displaystyle\int_0^1 [(x-1)^{\frac{1}{3}} + 1]^{\frac{1}{2}}\, dx.$

7. Integrar:

a) $\displaystyle\int e^{ex}\,dx.$

b) $\displaystyle\int e^{u}\sqrt{7+e^{u}}\,du.$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\tan(y)}}{cos^2(y)}\,dy.$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{w}-e^{-w}}{e^{w}+e^{-w}}\,dw.$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-z}}\,dz.$

f) $\displaystyle\int \frac{e^{2t}-2}{e^{2t}+3}\,dt.$

8. Muestra que $2e^{x}+3e^{-x}=4$ no tiene solución.

9. Sea $p(t)$ una población de individuos que conocen un chisme en una ciudad al tiempo $t \geq 0$ tal que

$$p(t) = \frac{Kp_0e^{rt}}{K-p_0+p_0e^{rt}}\,,$$

donde $r \in \mathbb{R}$ es la tasa a la que el chisme se propaga en la población, $p_0 > 0$ es la población inicial que conoce el chisme y $K > 0$ es la capacidad que tiene la ciudad para albergar individuos. Si en 2003 se tenía una población de 10^6 individuos que conocen el chisme y veinte años después dicha población se duplicó, encuentra el valor de la tasa de propagación del chisme en la población para una ciudad con capacidad para albergar al triple de individuos que la población inicial que conocen el chisme.

Cazuelazo semanal.

- Sea $f(x)$ una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Prueba que para toda función que satisface la ecuación $f'(x) = rf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y con $r \in \mathbb{R}$, existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ke^{rx}$ en todo $\mathbb{R}$.

- Muestra la Desigualdad de Jordan, es decir, que para toda $R > 0$ se satisface: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\,\mathrm{sen}(x)}\,dx < \frac{\pi}{2R}.$

  Ayuda: muestra primero que $\mathrm{sen}(x) \geq \dfrac{2x}{\pi}$ para toda $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.