INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 4: Logaritmo natural

1. Calcular la derivada de cada función. Para los dos últimos ejercicios usar derivación logarítmica.

   a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{\ln(x)} + \ln\left(\dfrac{4}{x^2}\right).$

   b) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^4+5}{\cos(x)}}.$

   c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(3-x)\left(\frac{3+t^6}{t^5+7}\right) dt.$

   d) $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{(x^2+1)^{5/2}\sqrt{2+\operatorname{sen} x}}.$

   e) $y = \dfrac{(x^2+5)\cos(x^3+2)}{\sqrt{x(x^3+3)}}.$

2. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int 2x\tan(x^2)\,dx.$

   b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

   c) $\displaystyle\int_1^6 \frac{dt}{2+\sqrt{t+3}}.$

   d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx.$

   e) $\displaystyle\int [1+\ln(x)]\cot(x\ln(x))dx.$

   f) $\displaystyle\int \frac{1}{x+x\operatorname{sen}(\ln(x))}\,dx.$

3. Halla TODAS las funciones diferenciables f que satisfacen la ecuación

$$[f(x)]^2 = \int_0^x \frac{uf(u)}{5+u^2}\,du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

4. Sea $L : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que $L(xy) = L(x) + L(y)$ y $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{L(1+t)}{t} = 1.$

   Prueba que $L(x) = \ln(x)$, para todo $x > 0$.

   Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa el límite para demostrar que $L'(x) = \dfrac{1}{x}.$

5. Sea $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{(\ln(t))^2}{1+t}\,dt$, con $x > 0$. Demuestra que $f(x) - f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{(\ln(x))^3}{3}.$

   Sugerencia: En $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ hacer el cambio de variable $u = \dfrac{1}{t}$. Después usar propiedades de la integral para resolver $f(x) - f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Cazuelazo semanal.

Demuestra que la función definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right], & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es continua en todo su dominio.