Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2024

Laboratorio 4: Trayectorias, Regla de la Cadena (Parte I)

1. Un objeto se mueve en el espacio xyz de tal manera que su posición al tiempo t es $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t, t^2 + t, t - 1)$ para $t \leq 1$. Al tiempo $t = 1$ el objeto comienza a moverse sobre una línea recta en dirección del vector $\mathbf{r}'(1)$ y a velocidad constante. Encuentra la posición del objeto al tiempo $t = 2$.

2. Si $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = e^{2t}$ para toda $t > 0$,

   (a) Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ como función de t. *Sugerencia*: Usa la relación $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)\left(\dfrac{dt}{dx}\right)$ junto con $\dfrac{dt}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^{-1}$.

   (b) Encuentra $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ como función de t. *Sugerencia*: Si $g(t) = \dfrac{dy}{dx}(t)$, entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ se define como $\dfrac{dg}{dx}$. Usa el inciso anterior.

3. (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) Una curva en el plano xy está dada paramétricamente por $x = t^2 + 2t$, $y = 3t^4 + 4t^3$ para toda $t > 0$. El valor de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en el punto $(8, 80)$ es:

   (A) 4 (B) 24 (C) 32 (D) 96 (E) 192

4. Sea $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, una trayectoria de clase C^1. Si $t_0 < t_1$, la longitud de la curva (o longitud de arco) descrita por la trayectoria al variar t de t_0 a t_1 se define como
$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$
   Dada la hélice parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos(5t), \mathrm{sen}(5t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, encuentra la longitud de la curva descrita por la trayectoria al variar t de 0 a 2.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Usa una composición de funciones y la *regla de la cadena* para demostrar que $f_x(a, b) = f_y(b, a)$.

   Nota: Aquí f_x denota la derivada parcial de f respecto a x.

6. Usa la regla de la cadena para calcular $\mathrm{D}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(1, 2)$ con $\mathbf{F}(u, v, w) = (v + uw, u^2 + w^2, uw^2 + v^3)$ y $\mathbf{G}(x, y) = (xy^2, x - y^2, 3x + 1)$.

7. Sea $z = x^2 - \dfrac{x}{y}$, $x = u^2 + v^2$, $y = 3u - v$. Encuentra el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ cuando $u = 1$, $v = -1$.