

Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2024

Laboratorio 3: Derivadas parciales, diferenciación, planos tangentes

- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$. Sea $z = T(x, y)$ la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 2, -7)$.
 - Encuentra la ecuación del plano en \mathbb{R}^3 que pasa por el punto $(1, -1, 3)$ y que es paralelo al plano $z = T(x, y)$.
 - Encuentra un vector no nulo que sea ortogonal al plano $z = T(x, y)$.
- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, -2 + h) - f(1, -2)}{h} = 4$. Supón que a es una constante tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{|f(x, y) - (f(1, -2) + (a + 1)(x - 1) + (3a - 1)(y + 2))|}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}} = 0.$$

Encuentra el valor de las derivadas parciales de f en el punto $(1, -2)$.

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Muestra que la derivada de \mathbf{F} en \vec{x} , denotada por $D\mathbf{F}(\vec{x})$, es A para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Nota: La derivada de una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en \vec{x} también es conocida como *matriz jacobiana* de \mathbf{F} en \vec{x} .

- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, diferenciable en todo \mathbb{R}^2 . Muestra que si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son constantes, entonces f es de la forma $f(x, y) = ax + by + c$, donde a, b, c son constantes.
- Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_1^2 + x_2x_3, x_3^3 - x_1x_2)$. Calcula $D\mathbf{F}(2, 2, 1)$.

- Sea A una matriz de n por n con entradas reales cuya entrada (i, j) es a_{ij} . Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$. Muestra que $Df(\vec{x}) = ((A + A^T)\vec{x})^T = \vec{x}^T (A + A^T)$. *Sugerencia:* para calcular la derivada parcial de f respecto a x_p , $p = 1, \dots, n$, observar que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{pp} x_p^2 +$

$$\sum_{i=1, i \neq p}^n a_{ip} x_i x_p + \sum_{j=1, j \neq p}^n a_{pj} x_p x_j + \sum_{i=1, i \neq p}^n \sum_{j=1, j \neq p}^n a_{ij} x_i x_j.$$