INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio (6-7): Logaritmos y exponenciales base a, trigonométricas inversas e hiperbólicas y sus inversas.

1. Si $2^{x+y} = 3^{x-y}$, calcular $\dfrac{y}{x}$.

2. Sea $f(x) = \log_2(1+x^2)$. Obtener:

   a) $\mathrm{Dom}(f)$.
   b) $\mathrm{Im}(f)$.
   c) Intersecciones con los ejes.
   d) Puntos críticos.
   e) Límites al infinito.
   f) Gráfica de f.

3. Determinar la concavidad o convexidad de la función $f(x) = \ln(x^x)$.

4. Invierte la función $f(t) = \dfrac{2^t+1}{2^t-3}$. Obtener el dominio e imagen.

5. Encuentra el valor de $\cosh(\alpha+\beta)$, si $\operatorname{senh}(\alpha) = \dfrac{4}{3}$ y $\cosh(\beta) = \dfrac{3}{4}$.

6. Simplificar:

   a) $\sec(\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x}))$
   b) $\cosh(\ln(x))$
   c) $\tanh(\ln(x))$
   d) $\cosh(\operatorname{arcsenh}(x)),\ x \in \mathbb{R}$
   e) $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\dfrac{x}{5}\right)\right)$

7. Probar las identidades:

   a) $\cosh^2(x) = \dfrac{\cosh(2x)+1}{2}$.
   b) $\operatorname{senh}(3x) = 4\operatorname{senh}^3(x) + 3\operatorname{senh}(x)$.
   c) $[\cosh(x)+\operatorname{senh}(x)]^n = \cosh(nx)+\operatorname{senh}(nx)$.
   d) $\operatorname{senh}(x)\pm\operatorname{senh}(y) = 2\operatorname{senh}\left(\dfrac{x\pm y}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{x\mp y}{2}\right)$.

8. Considérese la función: $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,sen}(1-\ln(x))$.

   a) Obtener:

      1) $\mathrm{Dom}(f)$.
      2) $\mathrm{Im}(f)$.
      3) Ceros de f.
      4) Soluciones de $f(x) = -\pi$.

   b) Probar que f es inyectiva.

c) Caracterizar la función inversa de f (dominio, imagen, regla de correspondencia).

d) Hacer un bosquejo de la gráfica de f.

9. Si $f(x) = \coth(x)$, entonces $f^{-1}(x) = \operatorname{arccoth}(x)$. Prueba que

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad \text{para} \quad |x| > 1 \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arccoth}(x) + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

10. Sea $x = \operatorname{senh}(y\sqrt{1+x^2})$. Muestra que $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 1$.

11. Sea $I(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} [f(u)]^2\, du$, donde $f(u) = \operatorname{sech}\left(\dfrac{u}{2}\right)$. Muestra que

$$\lim_{r\to\infty} I(r) = 4\,.$$

12. Muestra que para toda $t > 0$, $\displaystyle\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}\ dx = \int_0^t \operatorname{senh}^2(u)\, du.$

Además, notando que $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x) = 2\operatorname{senh}^2(x) + 1$, muestra que

$$\int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}\ dx = \frac{\operatorname{senh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}.$$

13. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cazuelazo semanal.

- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$ Verifica detalladamente que $f'(x)$ existe en todo $\mathbb{R}$ y muestra que $f(x)$ no es invertible en cualquier intervalo que incluya al origen.

Lagartijas previas al examen

1. Derivar:

   a) $f(x) = \Big[\cos(x)\Big]^{\cos(x)}$

   b) $g(x) = \Big[\ln(x)\Big]^{\ln(x)}$

   c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^{\cos x}) + \cos(x^{\operatorname{sen} x})$

   d) $h(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

   e) $f(x) = \Big(\log_3(x)\Big)\Big(\log_2(x)\Big)$

   f) $f(x) = \cosh(\sqrt{1 - x^2})$

   g) $g(x) = e^{\operatorname{sech}(x)}$

   h) $h(x) = \cosh(\tan(e^{2x}))$

   i) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(\log_2 x)}$.

   j) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{1 - 3^x}\right)$.

   k) $y = \Big(2^x + 1\Big)^{1/x}$, $x > 0$.

   l) $y = x^x\Big(\ln(x)\Big)^{\ln x}$, $x > 1$.

   m) $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}$, $x > 1$.

   n) $f(x) = \coth(\ln x)$.

   ñ) $f(x) = \cosh^2(\sqrt{2 - e^x})$.

   o) $f(x) = x^{\operatorname{senh}(x)}$, $x > 0$.

   p) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arcsenh}(x^2 - 1)}$.

   q) $y = \operatorname{arccosh}(2\sqrt{x + 1})$.

   r) $y = \operatorname{arctanh}\left((\tfrac{1}{2})^x\right)$.

   s) $f(x) = \operatorname{arcsec}(\ln(x))$.

   t) $f(x) = 3 \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2 - 1})$.

2. Calcular la siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\,dx$.

   b) $\displaystyle\int_2^4 x\,2^{x^2}\,dx$.

   c) $\displaystyle\int_0^2 3^x - 2^x\,dx$.

   d) $\displaystyle\int e^t \operatorname{senh}(t)\,dt$.

   e) $\displaystyle\int 2^x \cosh(2^x)\,dx$.

   f) $\displaystyle\int e^x\,10^x\,dx$

   g) $\displaystyle\int_{\frac{1}{10}}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x}\,dx$

   h) $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{1 - 3^x}}dx$.

   i) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$.

   j) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1 + \cosh(x)}\,dx$.

   k) $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \cosh^2(x)\,dx$.

   l) $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{arcsenh}(2x)}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,dx$

   m) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 9}}\,dx$.

   n) $\displaystyle\int \frac{e^x}{5 + e^{2x}}\,dx$.

   ñ) $\displaystyle\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x - 5}}\,dx$.