

## Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2024

### Laboratorio 2: Abiertos, cerrados, frontera, límites, continuidad

1. Demuestra que el conjunto de los números naturales es cerrado en  $\mathbb{R}$  y que el conjunto de números racionales no es ni abierto ni cerrado en  $\mathbb{R}$ .
2. Sea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ . Demuestra que  $A$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$  justificando que si  $\vec{X}_0 = (x_0, y_0)$  está en  $A$ , entonces la bola abierta  $B_r(\vec{X}_0)$  está contenida en  $A$ , donde  $r = \min\{x_0, y_0, 1 - x_0, 1 - y_0\}$ .
3. Si  $U$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ , demuestra que la frontera de  $U$  está en el complemento de  $U$ .
4. Demuestra que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{3x^2 + y^6}$  no existe.
5. Usa el hecho de que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1$  para demostrar (con una argumento  $\epsilon - \delta$ ) que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} = 1$ .
6. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  y  $f(0, 0) = 0$ . Demuestra que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .
7. Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , y  $\mathbf{F}(0, 0) = (0, 0)$ . Demuestra que  $\mathbf{F}$  no es continua en  $(0, 0)$ .