Laboratorio 1. Cálculo Diferencial e Integral III
Primavera 2024

Curvas y conjuntos de nivel

1. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 - 3xy - 3,\ g(x, y) = 3y + x - 1$. Encuentra los puntos en $\mathbb{R}^2$ que están tanto en la curva de nivel de f como en la de g correspondientes al valor (o nivel) 1.

2. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 - ay^2 + 5,\ g(x, y) = ax^2 + 2y$, donde a es una constante que se determina con la siguiente condición: El punto $(-2, -1)$ pertenece tanto a una curva de nivel de f como a una curva de nivel de g correspondientes a un mismo valor. Encuentra el valor de a y encuentra el valor correspondiente de las dos cuvas de nivel.

3. Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $3x^2y - ze^{x^2-y^2} = 1 + x + z$.
   (a) Encuentra una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, tal que S sea el conjunto de nivel de f correspondiente al valor -4.
   (b) Encuentra una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g = g(x, y)$, tal que S sea la gráfica de g.

4. Dibuja en el plano xy los conjuntos de nivel correspondientes al valor 0 de las siguientes funciones:
   (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2)$.
   (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 - y^2)^2$.
   (c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(y - x^2)$.

5. Repaso de coordenadas polares:
   (a) Usar la función $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ (también llamada "arcotangente" y denotada por arctan), para deducir una fórmula que calcule las coordenadas polares $(r, \theta), r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ de un punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ dado en coordenadas cartesianas (rectangulares).
   (b) Sean x, y números reales tales que $xy \neq 0$. Si r y θ son tales que
   $$x = r\cos(\theta), \quad y = r\operatorname{sen}(\theta),$$
   muestra que
   $$\frac{x^2 + y^2}{xy(1 + x^2 + y^2)} = \frac{2}{(1 + r^2)\operatorname{sen}(2\theta)} \quad \text{y que} \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \cos(2\theta).$$

6. Dibuja el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$ en los siguientes casos:
   (a) Como una ecuación en $\mathbb{R}^2$ (plano xy).
   (b) Como una ecuación en $\mathbb{R}^3$ (espacio xyz).