INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 3: TFC e Integral por sustitución

1. Sea $a > 0$. Encuentra el área de la región determinada por los ejes coordenados y la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

2. Calcular el siguiente límite:
$$\lim_{x \to 0} \int_2^{2+x} \frac{\sqrt{1+t^3}}{x}\, dt.$$
Sugerencia: Utiliza el TFC y recuerda que $F'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x}$.

3. Considera que $f(1) = 10$ y que la gráfica de la Fig.1 es la derivada de $f(x)$. Encuentra el valor de $f(2)$ y de $f(3)$.

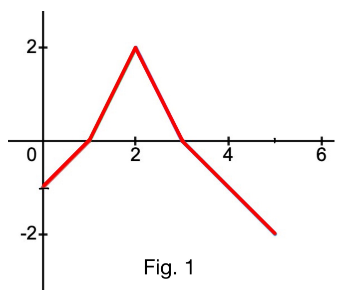

Fig. 1

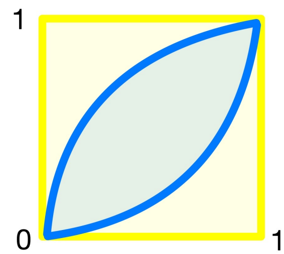

Fig. 2

4. Una fábrica de azulejos tiene el diseño de la figura Fig.2, donde el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ representa el azulejo, la parte sombreada entre las curvas $x^{\frac{1}{3}}$ y x^3 está pintada de azul y el resto de amarillo.
   a) ¿Se requiere más azul o más amarillo?
   b) ¿En qué proporción?

5. Sea $\overline{f}(a, b)$ el promedio de la función $f(x)$ en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dado por
$$\overline{f}(a, b) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx\,.$$
Prueba que $\overline{(\alpha f + \beta g)}(a, b) = \alpha \overline{f}(a, b) + \beta \overline{g}(a, b)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. Muestra que si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:
   a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x - \lambda) dx.$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\,dx.$

7. Sea $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función continua. Considera la función $H:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, f\left(\frac{t^2+1}{t}\right)\,dt.$$

Usando el método de sustitución en la integral definida, prueba que $H(1/x)+H(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$. (**No derivar**.)

8. Sean $a\in\mathbb{R}^+$ y f continua en $[0,a]$.

a) Usa la sustitución $u=a-x$ para demostrar que $\displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}\,du.$

b) Usa la parte (a) para demostrar que $\displaystyle\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}.$

(¡El valor de la integral no depende de f!)

c) Usa la parte (b) para obtener el valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}\,dx.$

9. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y $h(x) = x^2\displaystyle\int_{g(x^3)}^{g(x)} f(t)\,dt.$

a) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.

b) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.

Lagartijas para un fin de semana largo (en particular, los ejercicios en azul)

Derivar y simplificar :

a) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos^7(w^{\frac{1}{2}})\,dw.$

b) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2+3} u(12-u)\,du.$

c) $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \operatorname{sen}^4(z)\,dz + \int_4^x \cos^3(z^2)\,dz.$

d) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^7} x^4\,dt + \int_{2x^5}^1 t^6\,dt.$

e) $F(x) = \displaystyle\int_0^x 5x^3\csc^7(r^4)\,dr.$

f) $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^9 4x^2\operatorname{sen}^5(y^3)\,dy.$

g) $F(x) = \dfrac{\displaystyle\int_{4x+1}^{5x-1}\sqrt{u^5+3}\,du}{x^2+18}.$

h) $F(x) = \dfrac{10}{\displaystyle\int_4^{5x^2+1} 8\tan^4(v^5)\,dv}.$

i) $F(x) = \displaystyle\int_1^{\int_2^x 2\cos^5(t^4)\,dt} \frac{1}{1+t^{20}+\cos^{18}(t)}\,dt.$

Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \left(x - \frac{1}{2x}\right)^2 dx.$

b) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\csc x}.$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{2024}(x)\right) dx.$

d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{5}{x^3}\right) dx.$

e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} x\sqrt{2x-1}\, dx.$

f) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \operatorname{sen} |\pi - 3x| \; dx.$

g) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt.$

h) $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}^3(2\theta)}\, d\theta.$

i) $\displaystyle\int_{1}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{t^3+3}}\, dt$, con $x \geq 1$.

j) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{5\operatorname{sen} x\, \cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)^2}\, dx.$

k) $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt$, con $x \geq 0$.

Determina las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int (1-5x)^{\frac{2}{3}}(10x)\, dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}.$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\ \ (2+\tan x)^5}.$

d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx.$

Sugerencia: $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx.$

f) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}\, dx.$

g) $\displaystyle\int x^7\sqrt{x^4-1}\, dx.$

h) $\displaystyle\int (z^5+4z^2)(z^3+1)^{12}\, dz.$

i) $\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2(t)\sqrt{1+\tan(t)}}.$

j) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx.$

k) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}\, dx.$

l) $\displaystyle\int \frac{x\cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+5}}\, dx.$

Cazuelazo semanal.

- Para toda $\lambda \in (a,b)$, encuentra el valor de $0 < \mu < 1$ en términos de a, b y λ de tal modo que
$$\overline{f}(a,b) = \mu\overline{f}(a,\lambda) + (1-\mu)\overline{f}(\lambda,b)\,.$$
Nota: esta fórmula se conoce como combinación convexa.

- En el ejercicio 4, ¿cuál sería la proporción entre x^n y $x^{\frac{1}{n}}$, para $n \geq 1$?