INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 2: Propiedades, TVM para integrales y TFC

1. Sea $f(x)$ integrable. Prueba que:

   a) Considerando la definición y/o las propiedades del valor absoluto, verifica rigurosamente la desigualdad triangular
   $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

   b) Si $f(x)$ es par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

   c) Si $f(x)$ es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

   d) Sea $\omega \neq 0$, calcula el valor de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega x)\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)\,dx$.

2. A partir de las desigualdades
   $$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$
   obtén cotas superior e inferior para $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

3. Prueba la siguiente desigualdad para $f(x) = \sqrt{1 + x^2 + x^4}$,
   $$2 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq 2\sqrt{3}\,.$$

4. Sean $f, g : [a, b]$ continuas $(a < b)$ tales que $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

5. Determina la ecuación de la recta tangente a
   $$f(x) = \int_{\pi/2}^{x} x\,\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$
   en $x = \frac{\pi}{2}$. Utiliza este resultado para estimar el valor de $f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right)$.

6. Sea f una función tal que
   $$f(x) = \int_0^x (x - t)^2\, f(t)\,dt.$$
   Muestra que $f'''(x) = 2f(x)$.

7. Determina una función continua $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y una constante $a \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$27 + \int_a^x \frac{f(t)}{t}\, dt = 3x^{1/2}, \quad \forall x > 0.$$

8. Encuentra todas las funciones derivables g tales que

$$\int_0^x g(t)\, dt = 2\left[g(x)\right]^2.$$

9. Deriva las siguientes funciones. Reducir el resultado:

   a) $F(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   b) $F(x) = \left(\int_0^x \sqrt{1+s^4}\, ds\right)^2$

   c) $F(x) = \int_0^1 x^2\sqrt{1+t^4}\, dt.$

   d) $F(x) = \int_0^x x^2\left(\frac{1}{1+s^3}\right) ds.$

   e) $F(x) = \int_{-2x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

Cazuelazo semanal.

Verifica rigurosamente que:

1. Si $f(x)$ es lineal para el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, se satisface la identidad

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a).$$

2. Si $f(x)$ es cuadrática para el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, se satisface la identidad

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}(b-a).$$

Hint: Divide y vencerás, utiliza las propiedades que conoces para separar en integrales más sencillas.

Breviario cultural: Si $f(x)$ es cúbica, el resultado continúa siendo válido.