Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2023.

Laboratorio 13: Cambio de variables en integrales dobles

1. Sea D la región en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices $(0,0)$, $(2,-1)$, $(3,4)$ y $(5,3)$. Encuentra el valor de $\iint_D (-x+3y)dxdy$ haciendo un cambio de variables tal que el dominio de integración sea el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

2. Sea $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{T}(u,v) = (u^2 - 3v, uv + 2v^2)$. Suponer que D_1 y D_2 son dos regiones planas acotadas tales que $D_1 = \mathbf{T}(D_2)$ con $\mathbf{T}$ inyectiva en D_2. Reescribe $\iint_{D_1} ye^{x^2}dxdy$ como una integral de la forma $\iint_{D_2} g(u,v)dudv$, indicando explícitamente $g(u,v)$. Suponer que las regiones D_1 y D_2 son tales que ambas itegrales están bien definidas.

3. Encuentra el valor de $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$, donde
$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\, x \le 0,\, x \le y\}.$$

4. Sea D la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Demuestra que en coordenadas polares, D se puede escribir como
$$D = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le \theta < \pi/2,\, 0 \le r \le \frac{1}{\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)}\right\}.$$

5. Si D es el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en el plano xy, demuestra que
$$\frac{1}{2}(1-\cos(1)) \le \iint_D \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+(xy)^4}dxdy \le 1.$$

6. Sea T_a la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(a,0)$, y $(0,a)$ con $a>0$. Sea $D_a = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$. Encuentra el valor de
$$\lim_{a\to 0} \frac{\iint_{T_a}(x+1)^3(2y+3)^2dxdy}{\iint_{D_a} e^{x^2-y+1}dxdy}.$$

7. Demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.