

## Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2023

### Laboratorio 9: Criterio de la Segunda Derivada

1. Encuentra los puntos críticos de  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{6} - y^3 + z^2 + xy + 2z$  y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales, puntos silla.
2. Determina y clasifica los puntos críticos de  $f$  en los siguientes casos:  
a)  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - 4y + \frac{3}{2}x^2 - 3xy + \frac{3}{2}y^2$ ,    b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ .
3. Sea  $f(x, y) = x^3$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Muestra que todos los puntos críticos de  $f$  son puntos silla.
4. Sea  $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - kxy$ , donde  $k$  es una constante real no negativa. Clasifica el punto crítico  $(0, 0)$  de  $f$  como máximo local, mínimo local, o punto silla según el valor de  $k \geq 0$ .
5. En el plano  $xy$  están distribuidas  $m$  comunidades  $C_1, C_2, \dots, C_m$ . El centro geográfico de la comunidad  $C_i$  tiene coordenadas  $(x_i, y_i)$ . La comunidad  $C_i$  tiene  $N_i$  habitantes. El número total de habitantes en las  $m$  comunidades es de  $T = \sum_{i=1}^m N_i$  y la proporción de habitantes en la comunidad  $C_i$  respecto al total de las  $m$  comunidades es  $p_i = N_i/T$ .

Se desea construir una central de bomberos en un punto  $Q$  que tome en cuenta el cuadrado de las distancias a las  $m$  comunidades y también el número de habitantes en las comunidades. Para ello, se sugiere que el punto  $Q$  sea tal que  $f(Q) = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ , donde

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^m p_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2].$$

- (a) Encuentra las coordenadas del punto  $Q$ .
  - (b) Muestra que cuando todas las comunidades tienen el mismo número de habitantes, el punto  $Q$  es el promedio de los centros geográficos de las comunidades.
  - (c) Muestra que para el caso de 2 comunidades, el punto  $Q$  está sobre el segmento de recta que une  $(x_1, y_1)$  con  $(x_2, y_2)$ .
6. En el espacio  $xyz$ , ¿cuáles son las coordenadas del punto sobre el plano  $2x + y + 3z = 3$  que es más cercano al origen?
  7. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Se desea encontrar una línea recta  $y = mx + c$  que mejor ajuste a  $y = f(x)$  en el sentido siguiente: la integral  $\int_a^b (f(x) - (mx + c))^2 dx$  debe tomar el valor más chico posible al variar  $m$  y  $c$  en  $\mathbb{R}$ .

- (a) Encuentra una fórmula para los valores de  $m$  y  $c$  donde se alcanza dicho mínimo.
- (b) Para el caso  $[a, b] = [0, 1]$ , y  $f(x) = x^2$ , encuentra los valores de  $m$  y  $c$  donde se alcanza el mínimo.