

# Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2023

## Laboratorio 6 :

### Derivadas Parciales de Orden Superior y Regla de la Cadena (Parte II)

Nota: En algunos ejercicios se usa la notación  $f_x$  o bien  $\frac{\partial f}{\partial x}$  para denotar la derivada parcial de  $f$  respecto a la variable  $x$ . Similarmente se usa  $f_{xy}$  o bien  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  para denotar la segunda derivada parcial de  $f$  primero respecto a  $x$  y luego respecto a  $y$ .

1. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y, z)$ , de clase  $C^3$ . Usa el hecho de que para funciones de clase  $C^2$ , las derivadas cruzadas de segundo orden coinciden, para demostrar que  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$ .
2. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ . Sea  $w = f(x, y)$  y sean  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ . Demuestra que  $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .
3. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  y sea  $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^2$ . Escribe una fórmula para  $\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \mathbf{c})(t)$  usando la regla de la cadena.
4. Sea  $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en un abierto  $U$ ,  $u = u(x, y)$ . Se dice que  $u$  es armónica si  $u$  satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } U.$$

¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas?

- a)  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ,
  - b)  $u(x, y) = e^x \sin(y)$ ,
  - c)  $u(x, y) = y^3 + 3x^2 y$ ,
  - d)  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .
5. Sea  $z = f(x, y)$ ,  $x = g(u, v)$ ,  $y = h(u, v)$ , donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  de clase  $C^2$ . Muestra que  $z_{uu} = f_x g_{uu} + f_y h_{uu} + 2g_u h_u f_{xy} + (g_u)^2 f_{xx} + (h_u)^2 f_{yy}$ .
  6. Sea  $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en un abierto  $U$ ,  $u = u(x, y)$ . El laplaciano de  $u$  se define como  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Si  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ , muestra que en coordenadas polares, el laplaciano de  $u$  se escribe como  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ .