# Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2023

## Laboratorio 2: Abiertos, cerrados, frontera, límites, continuidad

1. Demuestra que el conjunto de los números naturales es cerrado en $\mathbb{R}$ y que el conjunto de números racionales no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

2. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$. Demuestra que $A$ es abierto en $\mathbb{R}^2$ justificando que si $\vec{X}_0 = (x_0, y_0)$ está en $A$, entonces la bola abierta $B_r(\vec{X}_0)$ está contenida en $A$, donde $r = \min\{x_0, y_0, 1 - x_0, 1 - y_0\}$.

3. Si $U$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, demuestra que la frontera de $U$ está en el complemento de $U$.

4. Demuestra que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{3x^2 + y^6}$ no existe.

5. Usa el hecho de que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$ para demostrar (con una argumento $\epsilon - \delta$) que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} = 1$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{xy}{|x| + |y|}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Demuestra que $f$ es continua en $(0, 0)$.

7. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, y $\mathbf{F}\ (0, 0) = (0, 0)$. Demuestra que $\mathbf{F}$ no es continua en $(0, 0)$.