

Laboratorio 1. Cálculo Diferencial e Integral III

Otoño 2023

Curvas y conjuntos de nivel

1. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 - 3xy - 3$, $g(x, y) = 3y + x - 1$. Encuentra los puntos en \mathbb{R}^2 que están tanto en la curva de nivel de f como en la de g correspondientes al valor (o nivel) 1.
2. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 - ay^2 + 5$, $g(x, y) = ax^2 + 2y$, donde a es una constante que se determina con la siguiente condición: El punto $(-2, -1)$ pertenece tanto a una curva de nivel de f como a una curva de nivel de g correspondientes a un mismo valor. Encuentra el valor de a y encuentra el valor correspondiente de las dos curvas de nivel.
3. Sea S la superficie en \mathbb{R}^3 definida por la ecuación $3x^2y - ze^{x^2-y^2} = 1 + x + z$.
 - (a) Encuentra una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, tal que S sea el conjunto de nivel de f correspondiente al valor -4 .
 - (b) Encuentra una función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g = g(x, y)$, tal que S sea la gráfica de g .
4. Dibuja en el plano xy los conjuntos de nivel correspondientes al valor 0 de las siguientes funciones:
 - (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2)$
 - (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 - y^2)^2$
5. Repaso de coordenadas polares:
 - (a) Usar la función $\tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ (también llamada "arcotangente" y denotada por \arctan), para deducir una fórmula que calcule las coordenadas polares (r, θ) , $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ de un punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ dado en coordenadas cartesianas (rectangulares).
 - (b) Sean x, y números reales tales que $xy \neq 0$. Si r y θ son tales que

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta),$$

muestra que

$$\frac{x^2 + y^2}{xy(1 + x^2 + y^2)} = \frac{2}{(1 + r^2)\sin(2\theta)} \quad \text{y que} \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \cos(2\theta).$$

6. Dibuja el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$ en los siguientes casos:
 - (a) Como una ecuación en \mathbb{R}^2 (plano xy).
 - (b) Como una ecuación en \mathbb{R}^3 (espacio xyz).