Instituto Tecnológico Autónomo de México

Notas de programación lineal

Fundamentos, Método Simplex, Dualidad y Puntos interiores

Edith Vargas-García & Andreas Wachtel

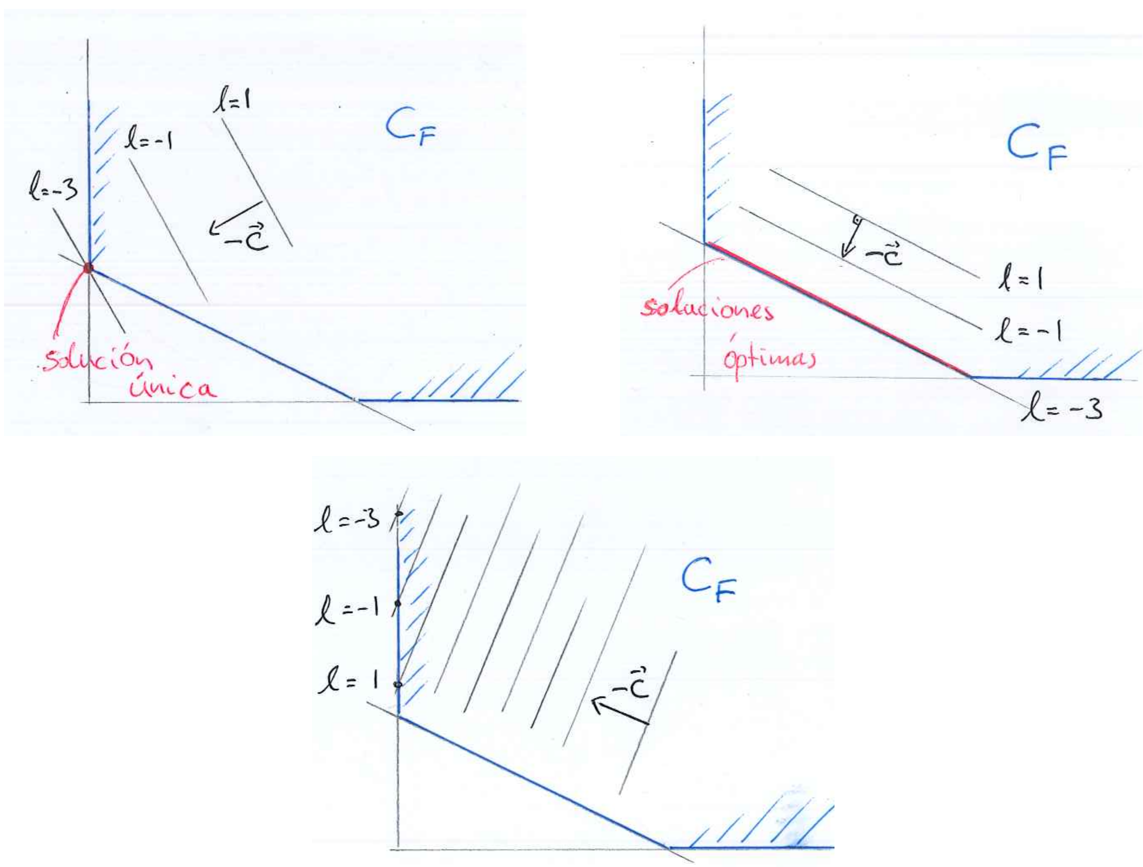


Figura: Los tres casos posibles (solución única, varias soluciones y ninguna solución óptima) para el mismo conjunto factible no-vacío dado por $C_F \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\, y \geq 0,\, 2y + x \geq 4\right\}$.

México, CDMX 2020

Estas notas introducen a los temas más relevantes dentro de la Programación Lineal, pretendemos que sea un material de apoyo para los no expertos en la materia.
En el 2017 al preparar por primera vez la materia, el segundo autor se encontró que la mayoría de los libros de Programación Lineal no seguían una notación común (por ejemplo algunos autores usan *polítopo* y *poliedro* como sinónimos) o no cubría a profundidad todos los temas que aquí señalamos (*e.g.* la *Regla de Bland, la equivalencia en el Lema de Sherman-Morrison, etc.*). La mayoría de las Tablas del método simplex son presentadas de manera distinta en distintos libros, por ejemplo las tablas presentadas en el libro Luenberger and Ye [2008], son diferentes de las usadas en el Bazaraa et al. [2011]. Más aún en el *Algoritmo Primal-Dual* se presentan justificaciones del buen funcionamiento del algoritmo, las cuales se encuentran mucho menos detalladas en las referencias mencionadas en nuestra bibliografía. El *Lema de Sherman-Morrisson*, lo presentamos aquí de forma más amigable que en otros libros. También, damos un ejemplo donde el usar la regla de Bland, evita que el algoritmo Simplex haga ciclos.

Por todo lo anterior surge la idea de hacer unas notas que cubran con los temas fundamentales (señalados en el temario) de programación lineal y que tenga una notación homogénea, tratando de demostrar la mayoría de las afirmaciones que hacemos. Ya que hemos estado trabajando por más de dos años el material, por última vez presentado en línea en verano 2020, decidimos diseñar el material en 22 sesiones de 2 horas de clase, hicimos una marca al final de cada sesión.

En la sección final se presentan tareas y ejercicios para que el lector tenga una mejor comprensión del material. Quisiéramos agradecer enormemente al profesor **Zeferino Parada García** por facilitarnos algunas tareas de las propuestas al final del libro, también a la profesora **Marta Cabo** por proporcionarnos el libro Williams [2013] que nos ayudó a dar ejemplos numéricos de modelación, también agradecerle por introducirnos al software **AMPL** y por algunos ejercicios sobre sensibilidad propuestos en la Tarea 6.

Sin más preámbulo comencemos.

Índice general

Capítulo 1. Fundamentos 5
1. Motivación, Modelación y ejemplos 6
2. Geometría 24
3. Soluciones locales y globales 26
4. Resolución gráfica 28
5. Un programa lineal en forma estándar 33
6. Teoremas fundamentales 39

Capítulo 2. El método Simplex 45
1. El procedimiento algebraico del método 46
2. Interpretación de coeficientes de la función objetivo 49
3. Procedimiento con tabla 50
4. La Fase II del método Simplex (en general) 52
5. Complejidad computacional 63
6. La Fase I del método Simplex 64
7. El método de la gran M 74

Capítulo 3. Dualidad 79
1. El problema dual 80
2. Propiedades de problemas duales de P.L. 86
3. La relación con economía 88
4. Análisis de sensibilidad 89
5. El algoritmo Simplex Dual 98
Un resumen parcial 105
6. El algoritmo Primal-Dual 107
7. Conos y el lema de Farkas 121

Capítulo 4. Puntos Interiores 125
1. Las condiciones KKT 126
2. El método de Newton 127
3. El método del elipsoide 133

Capítulo 5. Ejercicios 137
1. Tareas para modelar 137
2. Tarea 2 142

3. Tarea 3 145
4. Tareas de las dos Fases 148
5. Tareas de dualidad: Problemas duales 154
6. Tareas de dualidad: Sensibilidad 156
7. Tareas de dualidad: Algoritmos 160
8. Tareas de Puntos interiores 161

Índice alfabético 163

Bibliografía 165

Capítulo 1

Fundamentos

La programación lineal estudia problemas de optimización (la minimización o maximización) de una **función lineal** que esta restringida mediante **ecuaciones o desigualdades lineales**. A un problema de programación lineal lo abreviaremos como *problema P.L.*. Un ejemplo de un problema P.L. es el siguiente.

Ejemplo 1.1.

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Cada punto (x_1, x_2) que satisface las restricciones es un *punto factible*. En la Figura 1.1 se muestra el *conjunto factible* del este ejemplo que contiene los puntos factibles.

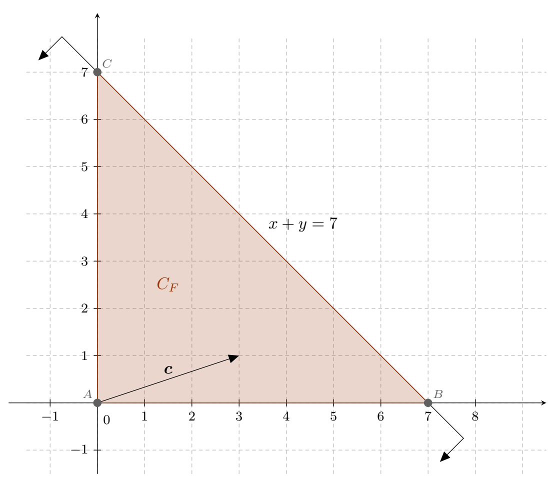


Figura 1.1. El Conjunto Factible del Ejemplo 1.1.

Historia: Goerge B. Dantzig alrededor de 1947, cuando trabajaba en la Fuerza Aérea como consejero matemático en Estados Unidos, publicó su algoritmo simplex para resolver modelos de Programación Lineal. Debido a que la Fuerza Aérea denomina programas *a sus diversos proyectos, el primer artículo de Dantzig se refiere a estos problemas como "programación de una estructura lineal". Cabe mencionar que antes en 1939, el economista L.V. Kantorovich planteó & resolvió un problema de este tipo, pero por falta de comunicación este resultado se dio a conocer hasta 1959.*

DEFINICIÓN 1.1. Un *problema de P.L.* tiene la forma (general):

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{sujeto a} & \boldsymbol{x} \in C_F \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{sujeto a} & \boldsymbol{x} \in C_F \,. \end{array}$$

Donde:

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ es un vector (columna) de incógnitas,
- la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *función objetivo*, es conocida y es **lineal** en las incógnitas, es decir, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ para algún vector columna $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, donde $\boldsymbol{c}^\top$ denota la transpuesta del vector $\boldsymbol{c}$.
- el conjunto C_F se llama *conjunto factible*, es conocido y representa las restricciones que constan de **igualdades y desigualdades lineales**.

1. Motivación, Modelación y ejemplos

¿A qué queremos llegar con la Modelación?
El objetivo de la Modelación es plantear un problema matemático (*e.g.* un problema de P.L.).

EJEMPLO 1.2. Un posible resultado de la Modelación es el siguiente problema de P.L.:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x + y \\ \text{sujeto a} & x - y \geq -1 \\ & x + 6y \leq 15 \\ & 4x - y \leq 10 \\ & x,\, y \geq 0\,. \end{array}$$

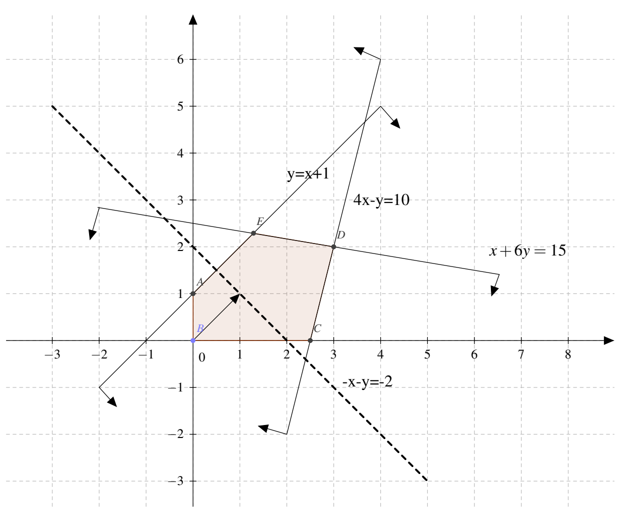


FIGURA 1.2. El conjunto factible (**no** es parte de la Modelación).

La Figura 1.2 muestra el conjunto factible del problema, el obtener esta visualización es parte de resolver gráficamente el problema. Después, de los ejemplos de Modelación veremos un argumento geométrico que nos permitirá concluir que el problema de P.L. tiene solución óptima cuando el conjunto factible es compacto (no vació, cerrado y acotado). Intuición: Una generalización del Teorema de Weierstrass aplica en este caso y nos dice que nuestra función lineal (continua) tiene un máximo y un mínimo. Por lo tanto, después de los ejemplos de Modelación veremos como obtener el conjunto factible y como resolver problemas (con pocas variables) gráficamente.

Las etapas del modelado & del análisis de problemas de P.L.:

1. Plantear un problema:
Consiste en un estudio de un sistema, la recolección de datos y la identificación del problema.

2. Elaborar una abstracción o una idealización del problema mediante un modelo matemático.
!Tener cuidado que el modelo represente de forma satisfactoria al sistema bajo análisis.

3. Deducir una solución.
Es posible buscar una o más soluciones óptimas.

4. Prueba, análisis (y posible) reestructuración del modelo.
Se examina la solución del modelo y su sensitividad a varios parámetros del sistema.

5. Implementación.
El modelo se pone en “marcha”, el cliente usa la solución óptima para tomar decisiones.

El resutado de la Modelación (etapas **1** y **2**),

en general,	es un modelo matemático,
en este curso,	es un problema de P.L.

EJEMPLO 1.3. (**Etapa 1 y 2 del modelado de un problema de producción**)

Lisa tiene una tienda en línea de joyas, donde vende aretes y collares. Le toma 30 minutos hacer un par de aretes y una hora en hacer un collar. Ya que Lisa es tutor de matemáticas, tiene solamente 10 horas a la semana para hacer las joyas. Además solo tiene suficiente material para hacer 15 joyas por semana. Tiene una ganancia de 15 pesos sobre cada par de aretes, y 20 pesos sobre cada collar. ¿Cuántos pares de aretes y collares debe hacer lisa cada semana para maximizar su ganancia, asumiendo que todo lo que se produce se vende?

Solución: A continuación se deben efectuar las etapas 1 y 2 del modelado (y el análisis) de un problema de programación lineal.

Variables: Sean

$$x \coloneqq \text{El número de pares de aretes que se producen.}$$

$$y \coloneqq \text{El número de collares que se producen.}$$

Función Objetivo: Queremos maximizar la ganancia, *i.e.* maximizar: $15x + 20y$

Restricciones: En las restricciones tenemos que hacer que las unidades coincidan.

- La primera restricción, tenemos la opción de poner las restricciones en minutos o en horas:

$$.5x + y \leq 10 \quad \text{Recuerde 30min =.5hrs}$$

- El material para las joyas nos da la siguiente restricción: $x + y \leq 15$
- Restricciones de no-negatividad son: $x \geq 0$ $y \geq 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 15x + 20y \\ \text{sujeto a} & .5x + y \leq 10 \\ & x + y \leq 15 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

1.1. Problemas de mezclas alimenticias. Bazaraa et al. [2011] y Williams [2013]
En esta sección se tratarán problemas de mezclas de alimentos. Empezaremos con un ejemplo numérico pequeño, con el fin de que el estudiante pueda modelar el problema de mezclas de forma general.

1.1.1. Un modelo de programación lineal (Mezclas). [Williams, 2013, p.8]
Un alimento se fabrica refinando los aceites crudos y mezclándolos.
Los aceites crudos se dividen en dos categorías:

Aceites vegetales	VEG 1
	VEG 2
Aceites no vegetales	OIL 1
	OIL 2
	OIL 3

Los aceites vegetales y no vegetales requieren diferentes líneas de producción para su refinamiento. En ningún mes, es posible refinar más de 200 toneladas de aceites vegetales y no más de 250 toneladas de aceites no vegetales. Sabemos que no hay perdida de peso en el proceso de refinación y que el costo de refinación puede ser ignorado.

Hay una restricción tecnológica en la dureza en el producto final. Las unidades en las cuales la dureza es medida deben estar entre 3 y 6 del producto final. Se supone que la dureza se mezcla linealmente. Los costos (por tonelada) y la dureza en los aceites crudos están dados en la siguiente tabla :

	VEG 1	VEG 2	OIL 1	OIL 2	OIL 3
Costos	£110	£120	£130	£110	£115
Dureza	8.8	6.1	2.0	4.2	5.0

El producto final se vende a £ 150 por tonelada. ¿Cómo debe el fabricante de alimentos hacer su producto con el fin de maximizar su ganancia neta?

Modelamos:

- *Variables:* Las variables que representan las cantidades desconocidas:

  x_1 := Cantidad (ton) de VEG 1 que será comprada, refinada y mezclada cada mes.

  $\vdots$

  x_5 := Cantidad (ton) de OIL 3 que será comprada, refinada y mezclada cada mes.

  y := Cantidad (ton) del producto final.

- *Función Objetivo:* Recuerde que

  "Ganancia neta" = "precio al que se vende el producto final" − "costo de producción".

  De esta manera se desea

$$\text{maximizar} \quad 150y - 110x_1 - 120x_2 - 130x_3 - 110x_4 - 115x_5 \,.$$

- *Restricciones:* En este problema hay varios tipos de restricciones, aquellas que se obtienen de las capacidades de refinamiento, de la restricción de dureza y la que se obtiene del hecho que el peso del producto final debe ser igual al peso de los ingredientes. De este modo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 200 && \text{(Capacidad de Refinamiento)} \\ x_3 + x_4 + x_5 &\leq 250 && \text{(Capacidad de Refinamiento)} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= y && \text{(Igualdad entre Pesos)} \\ 3y \leq 8.8x_1 + 6.1x_2 + 2.0x_3 + 4.2x_4 + 5.0x_5 &\leq 6y && \text{(Dureza)} \end{aligned}$$

Resumiendo lo anterior, obtenemos el siguiente problema de P.L.:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 150y - 110x_1 - 120x_2 - 130x_3 - 110x_4 - 115x_5 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 200 \\ & x_3 + x_4 + x_5 \leq 250 \\ & 8.8x_1 + 6.1x_2 + 2.0x_3 + 4.2x_4 + 5.0x_5 - 6y \leq 0 \\ & 8.8x_1 + 6.1x_2 + 2.0x_3 + 4.2x_4 + 5.0x_5 - 3y \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - y = 0 \\ & x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_5,\, y \geq 0. \end{aligned}$$

1.1.2. Problema de mezclas alimenticias. [Bazaraa et al., 2011, p.9]
Un molino agrícola produce alimento para pollos. Éste se hace mezclando varios ingredientes, como maíz, trigo, granos de alfalfa, *etc.* La mezcla debe hacerse de tal manera que el alimento satisfaga ciertos niveles para diferentes tipos de nutrientes como: Proteínas, calcio & vitaminas.

Para ser específicos, consideramos:

- n ingredientes $j \in \{1, \ldots, n\}$.
- m nutrientes $i \in \{1, \ldots, m\}$.
- un costo c_j por unidad del ingrediente j.

Introducido por la persona que modela:

- x_j es la cantidad (peso) del ingrediente j.
  Si b es la cantidad (peso) requerida del producto final, entonces se debe cumplir
  $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b\,.$$
  (La cantidad requerida nos da una intuición de que puede ser la función objetivo.)
- Suponga además que la cantidad del nutriente i contenida en una unidad del ingrediente j es a_{ij} y que los límites aceptables inferior y superior del nutriente i en una unidad del alimento son ℓ_i & u_i, respectivamente. Entonces, se deben tener las restricciones
  $$b\,\ell_i \leq a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b\,u_i \quad \text{para} \quad i \in \{1, \ldots, m\}\,.$$
- Finalmente, suponga que debido a un periodo de escasez de lluvia, el molino no puede adquirir más de w_j unidades del ingrediente j.

Se le pide al lector que use la información anterior para plantear el problema de P.L.
Si el lector quiere comprobar su resultado consultar la página 9 del libro Bazaraa et al. [2011].

$\uparrow$ día 1

1.1.3. Problema de la dieta. [Luenberger and Ye, 2008, p.14]
Esté problema responde a la siguiente pregunta. ¿Cómo se puede determinar la dieta más económica que satisfaga las necesidades nutritivas mínimas básicas para tener una buena salud?

Datos de un texto (se supone que):

- Queremos minimizar el costo de una dieta respetando la necesidades nutritivas mínimas básicas.
- En "el mercado" hay n alimentos. El j -ésimo alimento tiene el precio c_j .
- hay m nutrientes básicos.
- un individuo debe recibir al menos b_i unidades del i -ésimo nutriente (por día).
- una unidad del alimento $\#j$ contiene a_{ij} unidades del nutriente $\#i$.

Introducido por la persona que modela:

- x_j es la cantidad comprada del alimento $\#j$.

El problema de P.L. asociado es:

$$\begin{array}{lrl}
\text{minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{sujeto a} & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 & \text{(Restricciones nutritivas)} \\
& \vdots & \\
& a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m & \\
& x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, \ldots,\, x_n \geq 0 & \text{(Restricciones de no-negatividad)}
\end{array}$$

Definición 1.2. Entre dos vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ definimos la relación " $\leq$ " por:

$$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \iff a_i \leq b_i \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \ldots, n\} \,.$$

Similarmente, se definen las relaciones " $\geq$ ", " $>$ ", " $<$ ".

Entonces, en forma matricial el problema de dieta se deja escribir como sigue:

$$\begin{array}{rl}
\min\limits_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,.
\end{array}$$

Notación para todo el curso:

- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ serán vectores **columna**.
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz.
- $\boldsymbol{c}^\top$ es el vector transpuesto del vector $\boldsymbol{c}$.

1.2. Problema de fábrica. Una fabrica produce n artículos. Cada artículo requiere ciertos insumos. Suponga que hay m insumos. Las unidades disponibles del insumo i son b_i. Sea a_{ij} el número de unidades requeridas del insumo i para producir el artículo j. Se sabe que el costo de una unidad de insumo i es ϱ_i y el precio al que se vende el artículo j es σ_j. Suponiendo que todo lo que se produce se vende en el mercado, escriba el problema de P.L. que maximice las ganancias de la fabrica.

Datos del texto:

- hay m insumos (materias primas)
  - b_i unidades disponibles del insumo $\#i$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$,
  - ϱ_i costo de una unidad del insumo $\#i$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$,
- hay n artículos
  - a_{ij} número de unidades requeridos del insumo $\#i$ para producir el artículo $\#j$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$,
  - σ_j precio a que se vende el artículo $\#j$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$,
  - x_j unidades producidas del artículo $\#j$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$.
- Hipótesis (fuerte): Todo lo que se produce se vende.
- *Objetivo*: maximizar la ganancia.

Modelamos: Asignamos la letra c_j a la ganancia neta hecha cuando vendemos una unidad del artículo $\#j$, es decir, "precio a que se vende" menos "costo de producción":

$$c_j = \sigma_j - \sum_{i=1}^{m} \varrho_i a_{ij} \quad \text{para} \quad j \in \{1, \ldots, n\} \; .$$

(Alternativa: $\boldsymbol{c}^\top = \boldsymbol{\sigma}^\top - \boldsymbol{\varrho}^\top A$ cuando $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varrho}$ son vectores columna.)

Entonces, el problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeto a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (\text{para } i \in \{1 \ldots m\}) \\ & \qquad\qquad x_j \geq 0 \quad (\text{para } j \in \{1 \ldots n\}) \end{array}$$

Alternativamente, en la forma matricial este problema de la fábrica se escribe como:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{x}} & (\boldsymbol{\sigma}^\top - \boldsymbol{\varrho}^\top A)\boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \, . \end{array}$$

1.3. Problema de balance de trabajo.

Se desea distribuir un nuevo trabajo entre n-procesadores. Supongamos que:

- p_i es el trabajo del procesador i, en este momento.
- L es la cantidad de trabajo adicional para distribuir.
- x_i es la fracción del trabajo adicional L asignado al procesador i.

Objetivo: minimizar el trabajo realizado por cada procesador en el "futuro".

Modelamos:

- El trabajo del procesador i en el futuro es: $p_i + x_i L$.
- Aquí, el problema es encontrar una función objetivo que sea **lineal**.
  Empezamos con: Minimizar el máximo del trabajo realizado por un procesador.
  $$\min\big(\max\{p_1 + x_1 L, p_2 + x_2 L, \ldots, p_n + x_n L\}\big)$$
  o equivalentemente
  $$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \gamma \\ \text{sujeto a} \quad & \max\{p_1 + x_1 L, p_2 + x_2 L, \ldots, p_n + x_n L\} \leq \gamma \end{aligned}$$
  o equivalentemente
  $$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \gamma \\ \text{sujeto a} \quad & p_1 + x_1 L \leq \gamma \\ & \quad\quad \vdots \\ & p_n + x_n L \leq \gamma\,. \end{aligned}$$
- Como x_i es una fracción de L tenemos las restricciones adicionales
  $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad \text{y} \qquad x_i \geq 0 \ \text{ para } \ i \in \{1, \ldots, n\}$$

$\therefore$ El problema de P.L. es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \gamma \\ \text{sujeto a} \quad & p_i + x_i L \leq \gamma \quad (\text{para } i \in \{1, \ldots, n\}) \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Note que: La solución exacta está conocida cuando el trabajo inicial es igualmente distribuido, *i.e.*, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ y adicionalmente L se puede cortar en n pedazos iguales.
En este caso $\gamma = p_i + \frac{L}{n}$, $x_i = \frac{1}{n}$.

1.4. Un problema de colocación de recursos. (Inglés: Resource allocation)
La compañía *Cielito lindo* produce m artículos. Para ello, usa n recursos (tanto materiales, como horas de trabajo, tiempo de equipo rentado). Vender un artículo $\#i$ trae un ingreso c_i. Para producir un artículo $\#i$ se requieren A_{ij} unidades del recurso $\#j$. Usar el recurso $\#j$ cuesta d_j pesos. Finalmente, a lo más hay b_j unidades del recurso $\#j$. La compañía trata de maximizar su ganancia neta.

Modelamos:

- *Introducimos variables:* Sean
  x_j las unidades usadas del recurso $\#j$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$,
  y_i el número de unidades vendidas del artículo $\#i$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$.
- *Función objetivo:*
  Queremos maximizar la "ganancia neta" $=$ "ingresos - costo", es decir,
  $$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i - \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$$
- *Restricciones:*
  ¿Qué expresa el valor $y_i A_{ij}$?
  $\rightarrow$ unidades del recurso $\#j$ usadas para producir la cantidad y_i del artículo $\#i$.
  ¿Cuántas unidades del recurso $\#j$ requerimos?
  $\rightarrow$ Requerimos al menos $\sum_i y_i A_{ij}$ unidades del recurso $\#j$ para hacer los artículos, es decir
  $$x_j \geq \underbrace{\sum_i y_i A_{ij}}_{\text{Esto es lo que voy a usar}} \qquad \text{para} \quad j \in \{1 \ldots n\}$$
  los recursos son acotados
  $$0 \leq x_j \leq b_j \quad \text{y} \quad 0 \leq y_i \quad \forall i, j.$$

Ejercicio 1.1. Formule este problema en forma matricial.

Ejercicio 1.2. Usar un recurso $(x_j \geq 0)$ cuesta dinero y afecta de forma negativa la ganancia neta. Por lo tanto, maximizar la ganancia neta debe llegar a una solución de la forma $x_j = \sum_i y_i A_{ij}$, $(j \in \{1, \ldots, n\})$. Use esa igualdad como una restricción de antemano y reduzca el tamaño del conjunto factible, es decir, elimine las variables x_j de las restricciones y de la función objetivo.

1.5. Problema de transporte. Bazaraa et al. [2011] y Williams [2013].
El problema de transporte fue descrito por primera vez por Hitchcock (1941) y puede ser considerado como el obtener el flujo de costo mínimo a través de un tipo especial de red. *El problema de transporte se puede formular como aquel problema que busca cumplir los requisitos de cada cliente sin exceder la capacidad de cualquier proveedor tratando de mantener el costo mínimo.* Con el fin de describir el problema en general, se considera primero el siguiente ejemplo numérico.

Dato curioso: La compañía "Alibaba" es una compañía de transporte la cual gana dinero optimizando el transporte pero no transporta nada (como "Uber", una compañía de taxis sin autos).

1.5.1. Un problema de transporte (ejemplo numérico). [Williams, 2013, p. 82]
Se tienen 3 proveedores S_1, S_2, S_3 con sus respectivas capacidades de proveer y que hay 4 clientes T_1, T_2, T_3, T_4 con sus respectivas demandas.

Tanto las capacidades anuales de los proveedores como las demandas de los clientes se indican en la siguiente tabla:

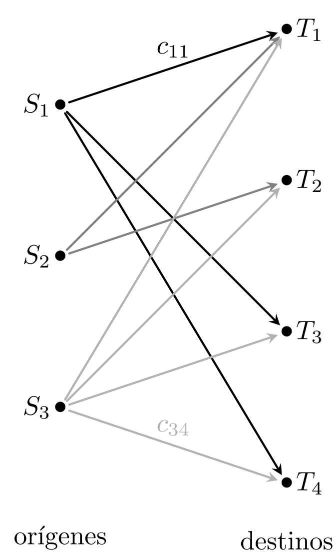
Proveedores	S_1	S_2	S_3	
Capacidades (por año)	135	56	93	
Clientes	T_1	T_2	T_3	T_4
Demandas (por año)	62	83	39	91

Los costos unitarios para subministrar a cada cliente desde un proveedor en específico se indican a continuación:

Proveedores	Clientes			
	T_1	T_2	T_3	T_4
S_1	132	∞	97	103
S_2	85	91	∞	∞
S_3	106	89	100	98

El símbolo (∞) indica la imposibilidad de enviar la mercancía de ciertos proveedores a ciertos clientes.

Recuerde que se busca cumplir los requisitos de cada cliente sin exceder la capacidad de cualquier proveedor tratando de mantener el costo mínimo.



Modelación:

Sea x_{ij} la cantidad de mercancías que se envían de S_i a T_j al año.

El modelo de programación lineal resultante es:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 132x_{11} + 97x_{13} + 103x_{14} + 85x_{21} + 91x_{22} + 106x_{31} + 89x_{32} + 100x_{33} + 98x_{34} \\
\text{sujeto a} & x_{11} + x_{13} + x_{14} \leq 135 \\
& x_{21} + x_{22} \leq 56 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 93 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 62 \\
& x_{22} + x_{32} = 83 \\
& x_{13} + x_{33} = 39 \\
& x_{14} + x_{34} = 91 \\
& x_{ij} \geq 0,\ \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{1,2,3,4\}.
\end{array}
$$

$\uparrow$ día 2

1.5.2. Problema de transporte II. [Bazaraa et al., 2011, p.12]
Suponga que:

- a_i $(i \in \{1 \ldots m\})$ son las cantidades de un cierto producto que se encuentran en m lugares (orígenes) y estas cantidades deben ser enviadas a n destinos cuyas demandas son b_j $(j \in \{1 \ldots n\})$.
- El envió de una unidad del origen $\#i$ al destino $\#j$ tiene un costo c_{ij}.
- Se desea determinar las cantidades x_{ij} a enviar entre cada par origen–destino (i, j), de modo que satisfagan las demandas y minimicen el costo total del transporte.

Modelamos:

- *Función objetivo:*
  Debemos minimizar los costos, es decir
  $$\min_{\boldsymbol{x}} \sum_j \sum_i c_{ij} x_{ij}$$
- *Restricciones:*
  No podemos enviar más que existe en cada origen, es decir,
  $$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} \leq a_i \quad \text{para} \quad i \in \{1 \ldots m\}.$$
  y queremos que llegue al destino al menos lo requerido:
  $$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} \geq b_j \quad \text{para} \quad j \in \{1 \ldots n\}.$$
  Note que minimizando los costos NO vamos a enviar más de lo requerido, es decir, enviamos
  $$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j \quad \text{para} \quad j \in \{1 \ldots n\}.$$

Juntando lo anterior llegamos al siguiente problema de P.L.:

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} & \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\sum_j x_{ij} \leq a_i & \text{para} \quad i \in \{1 \ldots m\} \\ & \displaystyle\sum_i x_{ij} = b_j & \text{para} \quad j \in \{1 \ldots n\} \\ & x_{ij} \geq 0 & \text{para} \quad i \in \{1 \ldots m\}, j \in \{1 \ldots n\}. \end{array}$$

NOTA: Es común suponer que lo que se envía será recibido, es decir, $\sum_j b_j = \sum_i a_i$.

Conexión con grafos: El problema del transporte "es" un grafo bipartito completo (direccionado), es decir, los orígenes y destinos son nodos y existe una conexión (arista) entre cada origen y cada destino.

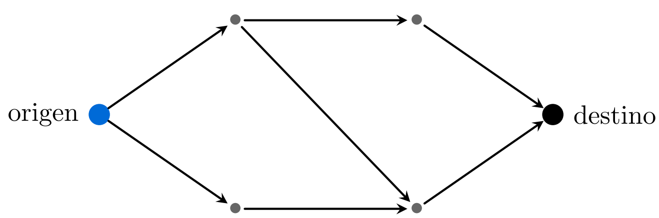
1.6. Problema de flujo a costo mínimo.

Partiendo del problema de transporte, si aumentamos el costo del transporte sobre algunas conexiones (aristas) a ∞, la solución óptima no va a transportar sobre esas aristas. Después de eliminar esas aristas (de costo ∞) e introducir otros nodos y aristas llegamos a un grafo más general. En el cual se encuentran orígenes (*source*), destinos (*sink*) y nodos introducidos.

Suponga que

- tenemos un conjunto N con n nodos y un conjunto E de aristas (*edges*).
- Una arista $(i,j) \in E$ conecta nodo $\#i$ con nodo $\#j$ (unidireccional).
- c_{ij} es el costo de transportar una unidad del nodo $\#i$ al nodo $\#j$ sobre la arista (i,j),
- x_{ij} es el número de unidades transportadas sobre arista (i,j) (del nodo $\#i$ al nodo $\#j$),
- ℓ_{ij}, u_{ij} son la cota inferior, superior, respectivamente, para unidades transportadas sobre arista (i,j),
- b_i es el número de unidades producidas $(b_i > 0)$ o consumidas $(b_i < 0)$ por nodo $\#i$ ($b_i = 0$ significa que todo lo que entra al nodo $\#i$ tiene que salir).

Un ejemplo (sin cantidades y restricciones indicadas):



Modelamos:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \\
\text{sujeto a} \quad & \underbrace{\sum_{j:\,(i,j)\in E} x_{ij}}_{\text{lo que sale del nodo } i} - \underbrace{\sum_{j:\,(j,i)\in E} x_{ji}}_{\text{lo que entra al nodo } i} = b_i \qquad \text{para } i \in N \\
& \ell_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \text{para } (i,j) \in E
\end{aligned}$$

Dato curioso: Para este tipo de problemas, también existe "el algoritmo Dijkstra" que se verá en Investigación de Operaciones. Su construcción se basa en argumentos con grafos.

Hiperplanos & semiespacios.

Para los ejemplos que siguen se requiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.3. Sean $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ un vector distinto de cero y $\ell \in \mathbb{R}$.

- Un *hiperplano* H_ℓ en $\mathbb{R}^n$ de *nivel* ℓ, es un conjunto de la forma: $H_\ell := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \ell\right\}$.
- Un hiperplano divide a $\mathbb{R}^n$ en dos regiones denominadas semiespacios.
  Un *semiespacio* cerrado es el conjunto de puntos de la forma $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le \ell\right\}$.

Comentarios:

1. Si $\ell = 0$, entonces H_ℓ contiene al origen.

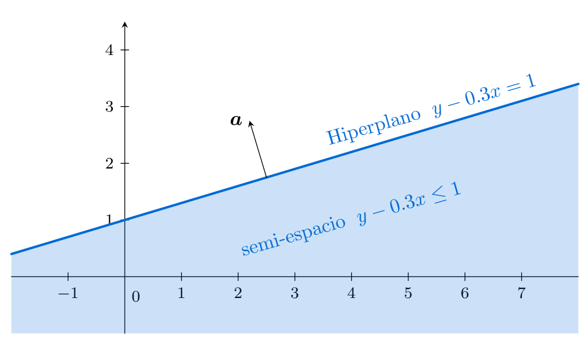
2. El vector $\boldsymbol{a}$ es ortogonal al hiperplano H_ℓ.
Demo. Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H_\ell$, entonces $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \ell - \ell = 0$, es decir, $\boldsymbol{a}$ es ortogonal a la diferencia de dos puntos arbitrarios en H_ℓ. $\square$

3. La dimensión de un hiperplano H_ℓ es $n-1$.
Demo. Como $\boldsymbol{a}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ el espacio nulo, denotado por $\mathrm{Null}(\boldsymbol{a}^T)$, tiene dimensión $(n-1)$, ya que tenemos $n-1$ variables libres. Es decir, existen $(n-1)$ vectores linealmente independientes $\{\boldsymbol{d}_i\}_{i=1}^{n-1}$ tales que $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d}_i = 0$. Concluimos que partiendo en $\boldsymbol{x} \in H_\ell$, nos podemos alejar en $(n-1)$ direcciones LI sin salir de H_ℓ, ya que $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i) = \ell \iff \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i \in H_\ell$. $\square$

4. Algunos autores escriben $H_\ell = \boldsymbol{x} + \mathrm{Null}(\boldsymbol{a}^T)$ donde $\boldsymbol{x} \in H_\ell$.
Esta igualdad (de conjuntos) se basa en los dos argumentos anteriores y en la definición

$$\boldsymbol{x} + \mathrm{Null}(\boldsymbol{a}^T) := \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \text{ para algún } \boldsymbol{v} \in \mathrm{Null}(\boldsymbol{a}^T)\right\}.$$

5. A veces, se dice que un hiperplano es un espacio afín de *codimensión 1*, es decir, en general no contiene al origen y le falta una dimensión para ser el espacio completo.



1.7. Problema de ajuste de una superficie lineal a datos. (Inglés: linear surface fitting) Este ejemplo puede aplicarse en estadística. En este caso, sirve para extrapolar una encuesta a otros miembros de la población.

- Detalle: Dadas las observaciones $(A_{:i}, b_i), i = 1, \ldots, k$ donde $A_{:i} \in \mathbb{R}^n$ y $b_i \in \mathbb{R}$, queremos encontrar un vector (de pesos) $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$ y un número $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boldsymbol{m}^\top A_{:i} + \gamma \approx b_i \qquad i \in \{1, \ldots, k\} \ .$$

  En un estudio de población:
  - El número k es el número de personas estudiadas.
  - Las entradas de $A_{:i}$ podrían contener el salario, número de años trabajando, valor de casa, número de niños dependientes, etc de la persona $\#i$ y b_i podría ser el impuesto que paga.

- Al encontrar las incógnitas $\boldsymbol{m}$ y γ podemos definir el hiperplano (superficie lineal)

$$\left\{(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} = \boldsymbol{m}^T \boldsymbol{x} + \gamma\right\} \ .$$

  Para $A_{:i}(i \leq k)$ el valor $x_{n+1} = \boldsymbol{m}^\top A_{:i} + \gamma$ aproxima b_i .
  Para una persona no estudiada con datos $A_{:\ell}\,(\ell > k)$ podemos predecir el impuesto que paga evaluando $\boldsymbol{m}^T A_{:\ell} + \gamma$.

¿Cómo encontrar las incógnitas con programación lineal?

Una forma es minimizar las "distancias" de los datos al hiperplano es minimizar el valor

$$\sum_{i=1}^{k} |A_{:i}^\top \boldsymbol{m} + \gamma - b_i| \,.$$

(hacer en clase)

La forma vectorizada: Sean $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ la matriz que tiene el vector $A_{:i}^\top$ en su i-ésimo renglón, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_k)^\top$, y_i una cota superior para la distancia del dato $\#i$ al hiperplano y $\mathbb{1} = (1, 1, \cdots, 1)^\top \in \mathbb{R}^k$ entonces el problema se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{m},\gamma} \quad & \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} \quad & -\boldsymbol{y} \leq A^\top \boldsymbol{m} + \gamma \mathbb{1} - \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{y} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n,\ \gamma \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

1.8. Problema de clasificación. (Decisiones automatizadas) Matousek and Gärtner [2007]
Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos de puntos con $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m$, $|B| = k$.

La idea: es encontrar un hiperplano que mejor separe los conjuntos A y B .

Sirve para: "entrenar sistemas" automatizados que después del entrenamiento toman decisiones.

En este caso A y B son los conjuntos para entrenar. Por ejemplo:

- Spam detection
- Detección de enfermedades. Donde A son personas sanas y B son personas enfermas.
- Otro ejemplo es una trampa automatizada, la cual describiremos a continuación, donde A, B son conjuntos para entrenar la decisión.

Ejemplo 1.4. (Trampa automatizada) La trampa automatizada tiene por objetivo detectar si es conejo o comadreja, conociendo el peso y el área determinada por la **sombra** del animal.

Los datos fueron recolectados para cierto número de conejos y comadrejas.

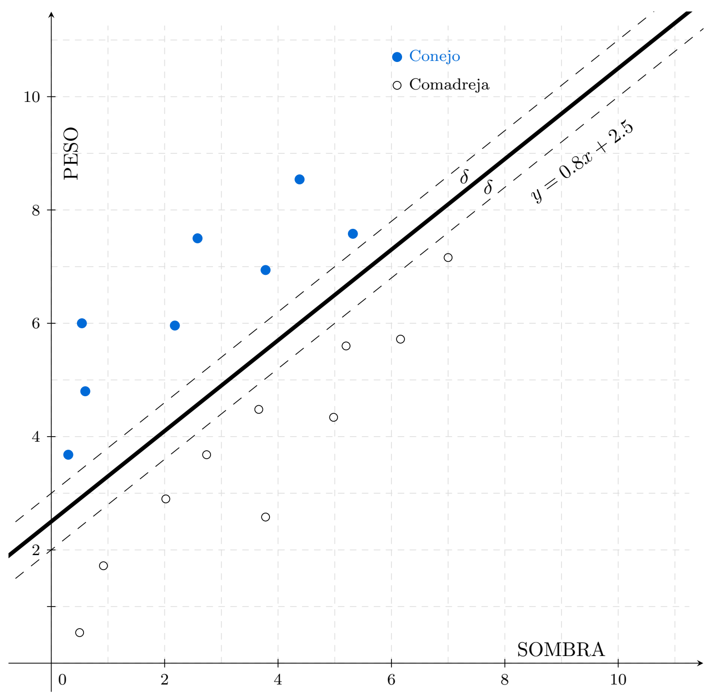


Figura 1.3. Trampa Automatizada.

Objetivo: Encontrar el hiperplano $y = mx + b$ que mejor separe los puntos, es decir que tenga una distancia maximal a los dos conjuntos. .

Entonces este problema se puede formular como:

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{m,d,\delta} & \delta & \\ \text{sujeto a} & y_i \geq mx_i + b + \delta & \text{(conejos)} \\ & y_j \leq mx_j + b - \delta & \text{(comadrejas)} \end{array}$$

Notas:

1. Los criterios (en este caso peso y sombra) definen los conjuntos A, B . En este sentido, si los criterios están bien determinados, existe $\delta > 0$ y el problema tiene solución.

2. Además los conjuntos A, B son conjuntos para "entrenar" la decisión, es decir, para un nuevo animal podemos medir su sombra (x^N) y peso (y^N), además decidir:
Si $y^N \geq mx^N + b + \delta,$ entonces es conejo y se cierra la trampa, en otro caso se queda abierta.

3. Si δ_{opt} es positivo y entonces la decisión es "más segura".
Si $\delta_{opt} \leq 0,$ entonces tenemos una área de incertidumbre y por lo tanto "mucha" inseguridad en la decisión. La razón puede ser que los criterios no son buenos. Este modelo también se aplica para detectar enfermedades, etc.

↑ día 3

2. Geometría

DEFINICIÓN 1.4. Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es *convexo* si y solo si para cualesquiera dos puntos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in C$ se cumple

$$(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \in C \quad \text{para cada} \quad t \in [0,1]\,.$$

Para un $t \in [0,1]$ fijo la suma $(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ se llama *combinación convexa*.
Si $t \in (0,1)$ y $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, entonces $(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ se llama *combinación convexa estricta*.

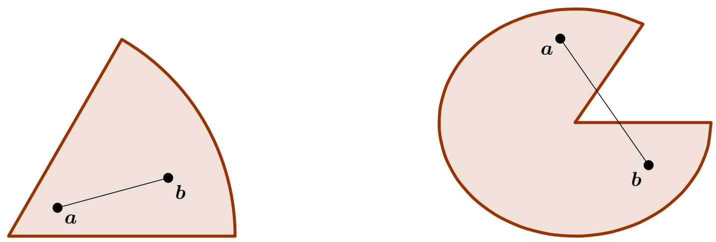


FIGURA 1.4. Un conjunto convexo, uno no convexo y las combinaciones convexas de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

DEFINICIÓN 1.5. Sea C un conjunto convexo. Un punto $\boldsymbol{x} \in C$ se denomina *punto extremo* o *vértice de* C, si $\boldsymbol{x}$ **no** se puede representar como una combinación convexa estricta. Es decir, **no** existen dos puntos **distintos** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in C$ tales que $\boldsymbol{x} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ para algún $t \in (0,1)$. De este modo, si existiera tal t, entonces los puntos tendrían que ser iguales. Esto es

$$\text{Si} \quad \boldsymbol{x} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \quad \text{para algún} \quad t \in (0,1) \text{ y } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in C \quad \text{entonces} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}.$$

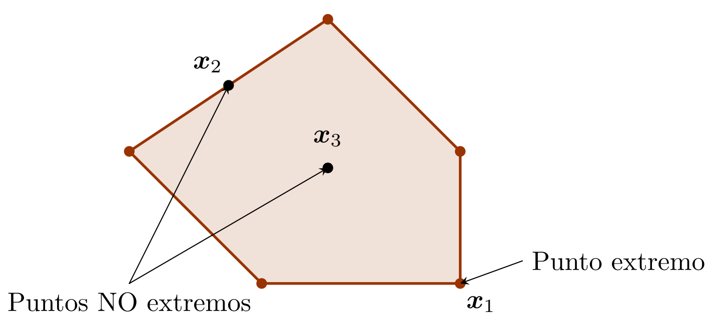


FIGURA 1.5. Un polígono convexo, puntos no extremos y extremos.

Ejemplos:

- Un círculo tiene un número infinito de puntos extremos (su circunferencia).
- Los puntos extremos de un polígono convexo (*e.g.* triángulo), son sus vértices.

Definición 1.6. Un *polítopo (convexo)* es la intersección de un numero finito de semiespacios. Convención: Un *poliedro (convexo)* es un polítopo convexo y acotado.

Ojo: Algunos autores usan polítopo y poliedro como sinónimos, y a veces (en Inglés) el polítopo es acotado y el poliedro puede ser no acotado. Usaremos la Definición 1.6.

Ejemplos:

- $\mathbb{R}^n$ es convexo.

  Demo. Ocuparemos el hecho de que $\mathbb{R}^n$ es generado por los vectores canónicos $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, *i.e.* $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. De este modo, cada elemento de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como combinación lineal de estos vectores. Tomamos dos puntos $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, entonces
  $$\boldsymbol{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} x_{1j} \cdot \boldsymbol{e}_j \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \sum_{j=1}^{n} x_{2j} \cdot \boldsymbol{e}_j .$$
  Luego, la linealidad nos da
  $$\begin{aligned} t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 &= t \cdot \sum_{j=1}^{n} x_{1j} \cdot \boldsymbol{e}_j + (1-t) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_{2j} \cdot \boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(t x_{1j} + (1-t) x_{2j}\right) \cdot \boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$
  □

- $\mathbb{R}^n$ no es un poliedro, ya que no es acotado.
- ¿Es $\mathbb{R}^n$ un polítopo?
  Adentro de $\mathbb{R}^n$ la respuesta es NO. Pero, en $\mathbb{R}^{n+1}$ todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ se encuentran en la intersección de los dos semiespacios $x_{n+1} \geq 0$ y $x_{n+1} \leq 0$.
- Hiperplanos y semiespacios son convexos. Verifique.
- Cada hiperplano es un polítopo. Cada semiespacio es un polítopo. Verifique.
- Más tarde (y en tareas) verán que cada conjunto factible C_F de un problema de P.L. es intersección finita de semiespacios y por lo tanto un polítopo (convexo).

Ejercicio 1.3. Este ejercicio se presenta en la Tarea 2 del Capítulo 5.

1. Demuestre que el conjunto $C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ es un polítopo convexo.

2. El conjunto $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - y = 2 \ \text{ y } \ x, y \geq 0\right\}$ es un polítopo convexo.
Escribe este conjunto como intersección de semiespacios. ¿El conjunto es acotado?

3. Demuestre que el conjunto $C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\, , \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ es un polítopo convexo.
Demo. Cambia las igualdades por dos desigualdades y reescribe el conjunto. □

3. Soluciones locales y globales

En esta sección ocuparemos el siguiente problema:

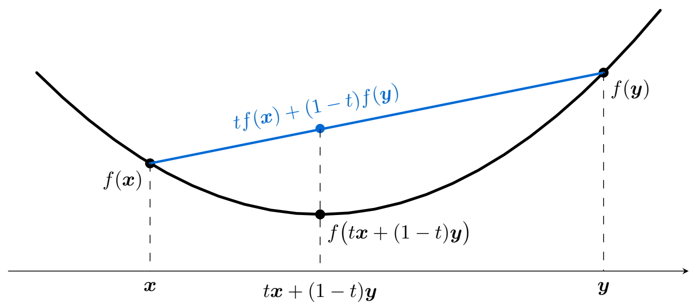
$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{sujeto a} \qquad \boldsymbol{x} \in C\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde C es un conjunto y f no es necesariamente lineal.

Definición 1.7. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo.
Una función $f\colon C \to \mathbb{R}$ se llama *convexa en C* si cumple que

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C \ \text{ y } \ t \in [0,1] \implies f\big(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}\big) \le t f(\boldsymbol{x}) + (1-t) f(\boldsymbol{y})\,.$$

Una función f se llama *cóncava en C*, si $-f$ es convexa.



Nota: Una función (afín) lineal, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{m}^\top \boldsymbol{x} + b$, es convexa y cóncava. Verifique!

Definición 1.8. A cualquier $\boldsymbol{x}^\star \in C$ lo denominaremos *solución local*, del Problema (1.1), si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\boldsymbol{x}^\star) \le f(\boldsymbol{y}) \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{y} \in B_\varepsilon(\boldsymbol{x}^\star) \cap C = \{\boldsymbol{y} \in C\colon \|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}\| < \varepsilon\}\ . \tag{1.2}$$

Un $\boldsymbol{x}^\star \in C$ se llama *solución global* o *solución óptima* si y solo si

$$f(\boldsymbol{x}^\star) \le f(\boldsymbol{y}) \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{y} \in C\,.$$

Lema 1.1. *Sea C un conjunto convexo y $f\colon C \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces*

- *Cada solución local, de (1.1), también es solución (global) óptima.*
- *El conjunto de las soluciones globales es convexo.*

Demostración.

(i) Sea $\boldsymbol{x}^\star \in C$ una solución local de (1.1). Entonces $\exists \varepsilon > 0$, tal que la cota (1.2) es válida. Supongamos que $\boldsymbol{x}^\star$ no es solución óptima, entonces existe $\hat{\boldsymbol{x}} \in C$ tal que $f(\hat{\boldsymbol{x}}) < f(\boldsymbol{x}^\star)$. Ahora, dado que C es convexo tenemos que

$$\underbrace{t\hat{\boldsymbol{x}} + (1-t)\boldsymbol{x}^\star \in C \cap \{\boldsymbol{y} \colon \|\boldsymbol{x}^\star - \boldsymbol{y}\| < \varepsilon\}}_{\text{Solo nos importa una parte de la cuerda que esta en la bola}} \qquad \text{para todo} \quad t \in (0, T)$$

donde T es suficientemente pequeño. Por lo tanto, usando que f es convexa y $f(\hat{\boldsymbol{x}}) < f(\boldsymbol{x}^\star)$ llegamos a

$$f\big(t\hat{\boldsymbol{x}} + (1-t)\boldsymbol{x}^\star\big) \leq t f(\hat{\boldsymbol{x}}) + (1-t) f(\boldsymbol{x}^\star) < f(\boldsymbol{x}^\star) \quad \text{para} \quad t \in (0, T),$$

lo cual contradice que $\boldsymbol{x}^\star$ es solución local.

(ii) Sean $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in C$ soluciones óptimas de (1.1), es decir, tienen el mismo valor objetivo $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2)$. Dado que C es convexo tenemos que

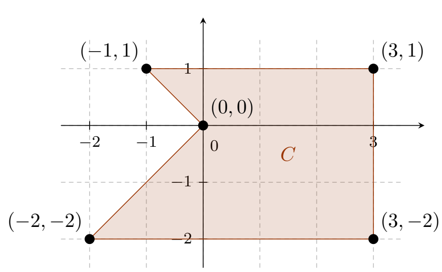
$$t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 \in C \quad \text{para todo} \quad t \in [0, 1]\,.$$

Por lo tanto, usando que $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2)$ y que f es convexa, obtenemos

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) &\leq f\big(t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2\big) \\ &\leq t f(\boldsymbol{x}_1) + (1-t) f(\boldsymbol{x}_2) \\ &= f(\boldsymbol{x}_1)\,, \end{aligned}$$

lo que implica que todo el segmento pertenece al conjunto de las soluciones globales. □

Ejercicio 1.4. El apartado (i) del Lema 1.1 requiere que C sea convexo.
Con este ejercicio damos la razón. Sea C dado por el siguiente dibujo



Además, sea $f(\boldsymbol{x}) \coloneqq x_1$, entonces el problema (1.1) es

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad x_1 \\ &\text{sujeto a} \quad\ \ \boldsymbol{x} \in C\,. \end{aligned}$$

¿Cuántas soluciones locales del problema hay?

¿Cuáles son?

¿Cuál es la solución óptima y el valor óptimo?

4. Resolución gráfica

A partir de esta sección (hasta el fin del curso) tratáremos problemas de P.L., por ejemplo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} \quad \boldsymbol{x} \in C_F \,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde C_F es un conjunto factible que consiste de restricciones lineales.

Para poderlo resolver gráficamente, primero vemos como dibujar el conjunto factible, después como reducir el valor objetivo.

4.1. ¿Cómo dibujar el conjunto factible?

Podemos dividir el proceso en tres pasos:

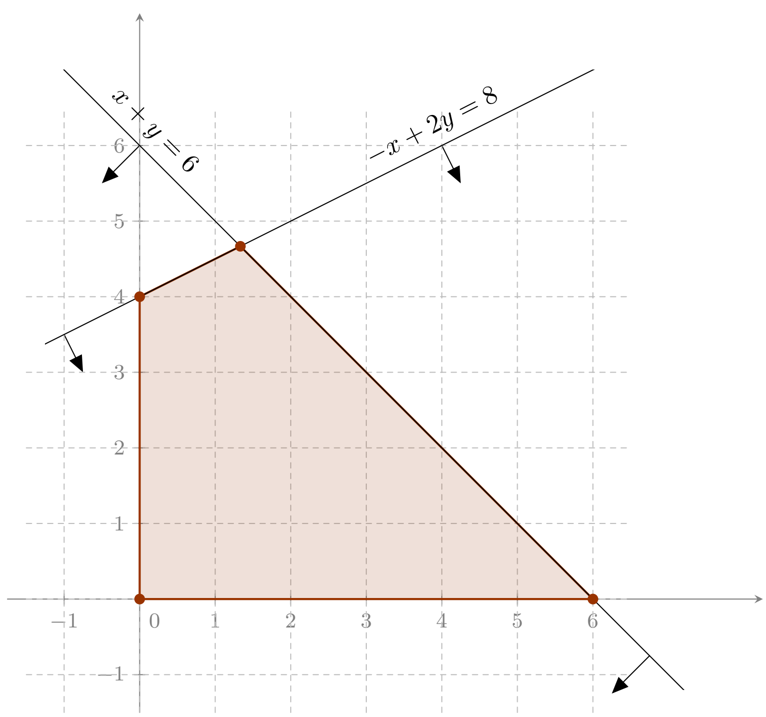
a) Consideramos cada restricción.

b) Graficamos en el plano las rectas correspondientes a cada una de las restricciones.

c) Cada recta divide al plano en dos semiespacios: Uno de ellos satisface la restricción y el otro no. Comprobamos mediante un punto en un semiespacio cuál satisface la restricción.

Ejemplo 1.5.

$$\begin{array}{lrrl} \text{minimizar} & -x_1 & -3x_2 & \\ \text{sujeto a} & x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 8 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \;. \end{array}$$



Suponga que estamos parados en $\boldsymbol{x} \in C_F$. ¿En cuáles direcciones $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ debemos irnos para reducir el valor objetivo? A continuación responderemos esta pregunta.

4.2. ¿Cómo reducir el valor objetivo?

Una respuesta corta: Suponga que conocemos $\boldsymbol{x} \in C_F$ y $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$, entonces queremos irnos en una dirección $\boldsymbol{d}$ tal que

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) < \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d} < 0\,.$$

Pero, debemos respetar el conjunto factible, es decir, se requiere que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d} \in C_F$. Es común introducir las siguientes definiciones que nos dicen en cuales direcciones nos podemos mover y en cuales se reduce el valor objetivo.

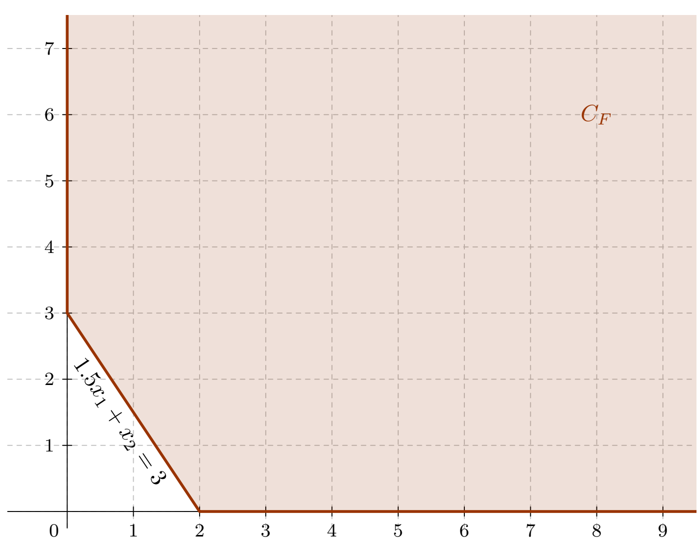
Definición 1.9. Dado $\boldsymbol{x} \in C_F$, decimos que un vector $\boldsymbol{d}$ es una *dirección factible* (en $\boldsymbol{x}$), si existe algún número $\bar{\alpha} > 0$ tal que $\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{d} \in C_F$ para toda $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$.

Definición 1.10. Sean $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $\boldsymbol{x} \in D$. Entonces, un vector $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ se llama *dirección de descenso*, si existe $\bar{\alpha} > 0$ tal que

$$f(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}) \quad \text{para todo} \quad \alpha \in (0,\bar{\alpha})\,.$$

Ejemplo 1.6. (Direcciones factibles de descenso)
Considere el siguiente problema, cuya región factible se muestra en la Figura abajo.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -\epsilon x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 1.5x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Observe que el valor óptimo no esta acotado, ya que $-\epsilon x_1 + x_2 \to -\infty$ cuando $x_1 \to \infty, x_2 = 0$ y $x_1 > 2, x_2 = 0$ es factible. Entonces, existe una dirección factible de descenso en la cual C_F no esta acotado. En efecto, todo punto del rayo que inicia en $\binom{2}{0}$ con dirección $\boldsymbol{d} = \binom{1}{0}$ cumple

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \alpha\boldsymbol{d} \in C_F \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{d} := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{d} = -\varepsilon < 0\,.$$

¿Existe una dirección de mayor descenso? y ¿cómo visualizar en cuales direcciones se reduce el valor objetivo? La primera pregunta se responde en el siguiente Lema, la segunda con las observaciones después.

Lema 1.2. *Dado* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ *distinto del vector cero, el problema*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} \\ \textit{sujeto a} & \|\boldsymbol{d}\|_2 \leq 1\,, \end{array}$$

tiene el valor óptimo $-\|\boldsymbol{c}\|_2$ *y la solución única es* $\boldsymbol{d}^\star = -\boldsymbol{c}/\|\boldsymbol{c}\|_2$.

Demostración. Sea $\boldsymbol{d}$ un vector arbitrario con $\|\boldsymbol{d}\|_2 \leq 1$ y sea β el ángulo entre $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$, entonces

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} = \cos(\beta)\|\boldsymbol{c}\|_2\|\boldsymbol{d}\|_2 \geq -\|\boldsymbol{c}\|_2\|\boldsymbol{d}\|_2 \geq -\|\boldsymbol{c}\|_2\,.$$

Esa cota inferior es una igualdad para $\boldsymbol{d}^\star = -\boldsymbol{c}/\|\boldsymbol{c}\|_2$, ya que

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d}^\star = \boldsymbol{c}^\top \left(\frac{-\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|_2}\right) = \frac{-\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|_2} = \frac{(\|\boldsymbol{c}\|_2)^2}{\|\boldsymbol{c}\|_2} = -\|\boldsymbol{c}\|_2\,.$$

Unicidad: De la cota inferior sabemos que el ángulo β_2 entre $\boldsymbol{c}$ y otra dirección $\boldsymbol{d}_2$ que no este en el *conjunto generado por* $\boldsymbol{c}$, es decir, $\boldsymbol{d}_2 \notin \operatorname{span}\{\boldsymbol{c}\}$, es distinto de π. Por lo tanto, $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d}_2 > -\|\boldsymbol{c}\|_2\|\boldsymbol{d}\|_2 \geq -\|\boldsymbol{c}\|_2$, lo cual implica $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d}_2 > \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d}^\star$ puesto que $\|\boldsymbol{d}_2\|_2 \leq 1$. Observe que está última desigualdad nos dice que si hay otra dirección, está no minimiza o no es menor que la mínima. Por otro lado $\boldsymbol{d}^\star \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{c}\}$ es el vector más largo (con $\|\boldsymbol{d}^\star\|_2 = 1$) que da $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d}^\star < 0$, los otros dan un valor más grande o positivo. □

Comentarios:

- El problema en Lema 1.2 no es lineal.
- Observe que la solución en Lema 1.2 es un vector normal del hiperplano $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$.
  $\therefore$ Empezando en $\boldsymbol{x}$ conviene ir en dirección $-\boldsymbol{c}$.
  Otro punto de vista es el siguiente:
  Buscamos el hiperplano con el nivel mínimo que tiene intersección NO vacía con C_F.

La forma general: El siguiente argumento muestra que las soluciones óptimas (si existen) siempre se encuentran en la frontera.

- El vector $\boldsymbol{c}$ define hiperplanos de varios niveles ℓ :

$$H_\ell = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \ell \right\}.$$

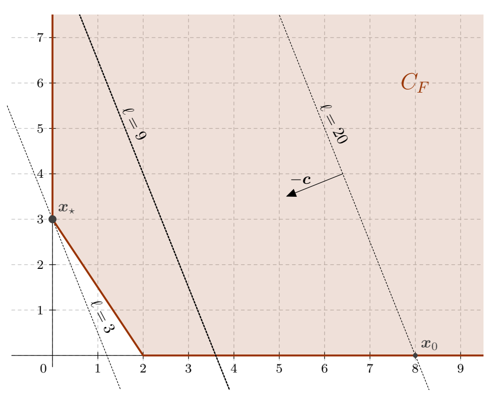
  Entonces, el problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} && \boldsymbol{x} \in C_F \end{aligned}$$

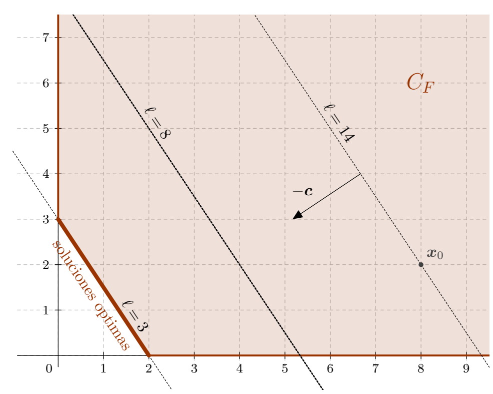
  equivale a

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \ell \\ &\text{sujeto a} && \boldsymbol{x} \in C_F \cap H_\ell\,. \end{aligned}$$

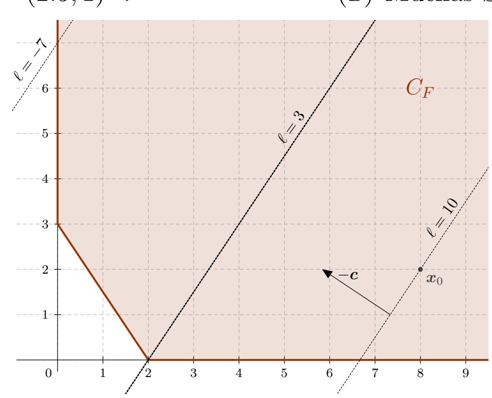
- El nivel se reduce en direcciones $\boldsymbol{d}$ que satisfacen $\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{c} < 0$ (más en $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{c}$).
  Si C_F está acotado en esas direcciones, es decir, si existe una frontera, entonces las soluciones están en la frontera. La solución es única cuando $C_F \cap H_{\ell_{opt}} = \{x^\star\}$, lo cual se cumple cuando $\boldsymbol{c}$ NO es ortogonal a una frontera.
  Ejemplos con distintos vectores $\boldsymbol{c}$ y C_F del Ejemplo 1.6 se muestran en la Figura 1.6.



(A) Solución única, $\boldsymbol{c} = (2.5, 1)^\top$.



(B) Muchas Soluciones, $\boldsymbol{c} = (1.5, 1)^\top$.



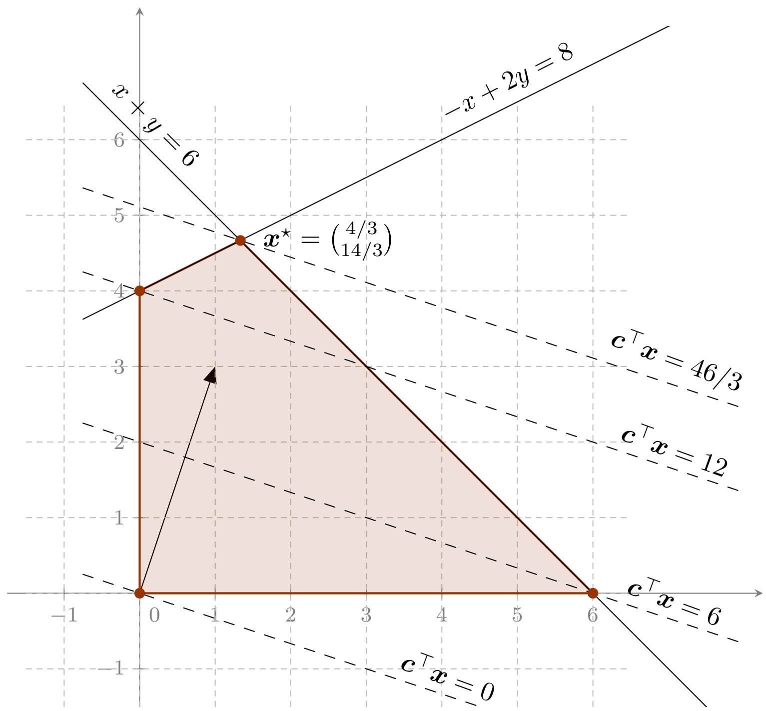
(C) Problema no acotado "No existe una solución óptima", $\boldsymbol{c} = (1.5, -1)^\top$.

FIGURA 1.6. Los 3 casos posibles de soluciones cuando $C_F \neq \emptyset$.

↑ día 4

Ejemplo 1.7. Ahora resolvemos gráficamente el problema:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0\,. \end{aligned}$$



Conclusiones:

1. Si $C_F \neq \emptyset$ es acotado, entonces existe un vértice que es solución óptima.

2. Dado un problema de P.L. podemos llegar a 4 casos:

a) Se tiene $C_F \neq \emptyset$ y una solución óptima única (que es un vértice).

b) Se tiene $C_F \neq \emptyset$ y muchas soluciones óptimas (algunos vértices son soluciones óptimas).

c) Se tiene $C_F \neq \emptyset$ y un problema no acotado.

d) El conjunto factible es vació $(C_F = \emptyset)$, no existe punto factible ni solución óptima.

Más adelante mostraremos los casos a) y b) usando los Teoremas fundamentales de la Programación Lineal. Para esto primero unificamos los problemas de P.L. (en la siguiente sección).

5. Un programa lineal en forma estándar

Con el fin de diseñar algoritmos para la variedad de problemas que hemos visto, como primer paso tenemos que transformar el *problema original* a su forma estándar, y luego aplicar el algoritmo al problema estándar y traducir los resultados obtenidos al *problema original*. Es por ello que damos la siguiente definición.

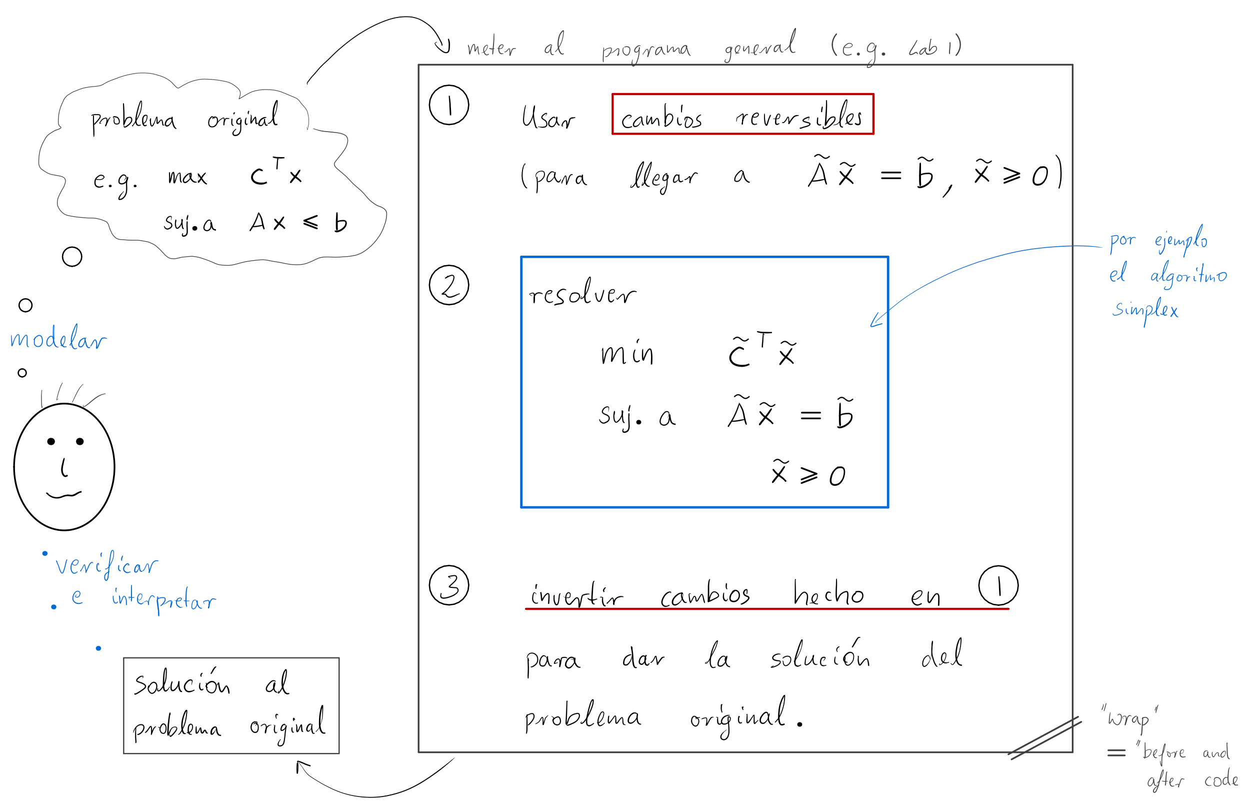
Definición 1.11. Un problema de P.L. en *forma estándar* es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

La idea de tener una forma estándar consiste en:

- unificar demostraciones,
- implementar un algoritmo para varios problemas de Programación Lineal,
- evitar desigualdades de la forma $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, ya que son difíciles de implementar.

¿Cómo funciona?



5.1. Cambios reversibles. ¿Cómo llegar a la forma estándar?

5.1.1. En la función objetivo.

Maximizar f equivale a minimizar $-f$ y multiplicar el valor óptimo (mínimo) con -1, *i.e.*

$$\max_{\boldsymbol{x}\in C_F} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \max_{\boldsymbol{x}\in C_F} -(-\boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} = -\Big[\min_{\boldsymbol{x}\in C_F} (-\boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x}\Big] .$$

5.1.2. Cambiar desigualdades por igualdades.

(Restricciones de variables serán tratadas abajo.)

Existen dos casos:

- Si la restricción $\#i$ del problema original es de la forma " $\leq$ ":

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \,,$$

  entonces introducimos una nueva variable no-negativa ("*variable de holgura*") $x_{n+1} \geq 0$ con costo cero $(c_{n+1} = 0)$ y cambiamos la restricción $\#i$ por las siguientes restricciones

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \quad , \quad x_{n+1} \geq 0 \,.$$

- Si una restricción $\#i$ es de la forma " $\geq$ ", entonces restamos (del lado izquierdo) una nueva variable no negativa ("*variable de excedente*") con costo cero $(c_{n+1} = 0)$ y cambiamos la restricción por:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \quad , \quad x_{n+1} \geq 0 \,.$$

Resumen: $\tilde{\boldsymbol{c}}^\top = (\boldsymbol{c}^\top, 0)$, $\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})^\top$ y $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$.

5.1.3. Cambios reversibles sobre variables:

- Una variable $x_j \leq 0$ es reemplazada por $-\tilde{x}_j$ en donde ocurre (función objetivo y restricciones), es decir, $\tilde{x}_j := -x_j \geq 0$ implica $\tilde{A}_{:j} = -A_{:j}$ y $\tilde{c}_j = -c_j$.
- Cuando tengamos restricciones de la forma

$$\ell_j \leq x_j \qquad \text{o} \qquad x_j \leq u_j$$

  se ocupan variables auxiliares $\tilde{x}_j \geq 0$ definidas por

$$\tilde{x}_j := x_j - \ell_j \qquad \text{o} \qquad \tilde{x}_j := u_j - x_j \,.$$

  Las cuales nos servirán para reemplazar x_j en donde ocurre, por ejemplo $x_j = \tilde{x}_j + \ell_j$ cambia el lado derecho $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} - \ell_j A_{:j}$ y la función objetivo.
- Cuando una variable está acotada por dos valores distintos:

$$\ell \leq x_j \leq u \quad \iff \quad 0 \leq x_j - \ell \leq u - \ell$$

  se puede reemplazar usando la definición anterior y añadiendo una igualdad al sistema:

$$\tilde{x}_j := x_j - \ell \leq u - \ell \quad , \quad \tilde{x}_j + x_{nueva} = u - \ell \qquad \text{y} \qquad \tilde{x}_j, x_{nueva} \geq 0 \,.$$

  Esto causa, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$, $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{m+1}$ y $\tilde{\boldsymbol{c}}, \tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- Para variables libres $x_j \in \mathbb{R}$ (o no restringidas) existen dos opciones:

  La primera opción:

  Sea $x_1 \in \mathbb{R}$. Supongamos que la restricción $\#i$ es una igualdad, tal que

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad , \quad a_{i1} \neq 0\,.$$

  Entonces tenemos

$$x_1 = \frac{1}{a_{i1}}\left(b_i - \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

  y podemos reemplazar la variable x_1 en donde ocurre con esa expresión y eliminar la restricción $\#i$.

EJEMPLO 1.8. El problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_2 \geq 0\,,\; x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

equivale a $(x_1 = 5 - 2x_2 - x_3)$ y el problema reducido

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 5 + (3-2)x_2 + (4-1)x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 10 + (3-4)x_2 + (1-2)x_3 = 6 \\ & x_2 \geq 0\,,\; x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Después, de resolver el problema reducido, podemos calcular $x_1 = 5 - 2x_2 - x_3$ y definir la solución óptima del problema original.

Note que: El 5 en la función objetivo no afecta la solución óptima, solo el valor óptimo. Típicamente, se resuelve el problema reducido sin el 5 en la función objetivo, y después se suma el 5 al valor óptimo del problema reducido.

La segunda opción:

Reemplazar $x_j \in \mathbb{R}$ por la diferencia de dos variables no negativas

$$x_j := x_j^+ - x_j^- \;, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$$

en donde ocurre. Esto dobla la columna $A_{:j}$ a $[A_{:j} \mid -A_{:j}]$ y c_j a $[c_j| - c_j]$.

Note que esa expresión no es única y que introducimos una variable adicional.

Pero, si aparece x_j y su valor absoluto $|x_j|$, podemos escribir $|x_j| = x_j^+ + x_j^-$, ya que la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} a \\ |a| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^+ - a^- \\ a^+ + a^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ a^- \end{pmatrix}$$

es única.

Ejercicio 1.5. Transforma el siguiente problema a su forma estándar. Sea $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} && \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq 1\,. \end{aligned}$$

Solución: Dado que $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$, el problema equivale a

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{j=1}^n c_j\, x_j \\ &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n |x_j| \leq 1\,, \end{aligned}$$

Luego cambiamos $x_j, |x_j|$ por $x_j^+, x_j^- \geq 0$. Este cambio es invertible, ya que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ lo es. Entonces, el problema equivale a

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{j=1}^n c_j(x_j^+ - x_j^-) \\ &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_j^+ + x_j^- \leq 1 \quad \text{y} \quad x_j^+, x_j^- \geq 0 \quad (\text{para todo } j)\,, \end{aligned}$$

Después, de introducir una variable de holgura llegamos a la forma estándar. La que en notación vectorial se escribe:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && (\boldsymbol{c}^\top, -\boldsymbol{c}^\top, 0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^+ \\ \boldsymbol{x}^- \\ y \end{pmatrix} \\ &\text{sujeto a} && \mathbb{1}^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^+ \\ \boldsymbol{x}^- \\ y \end{pmatrix} \\ &&& \boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{x}^- \geq \boldsymbol{0},\ y \geq 0\,. \end{aligned}$$

Nota. Las transformaciones sobre variables y el cambio de maximizar a minimizar causan que resolvamos un problema estándar (equivalente pero diferente al problema original). Después de resolver el problema estándar tenemos que recordar (re-invertir) las definiciones (cambios) hechas para obtener la solución óptima y el valor óptimo del problema original.

Nota. Algunas de estas transformaciones serán útiles para poder meter un problema a un paquete de software.

Primera práctica de laboratorio.

Introducción al programa `linprog` de MatLab. Está práctica, la cuál puede ser realizada en el salón de clases, tiene como objetivo introducir al lector al uso de `linprog` de MatLab.

`https://es.mathworks.com/help/optim/ug/linprog.html`

La llamada:

```
[X,z] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,Lb,Ub)
```

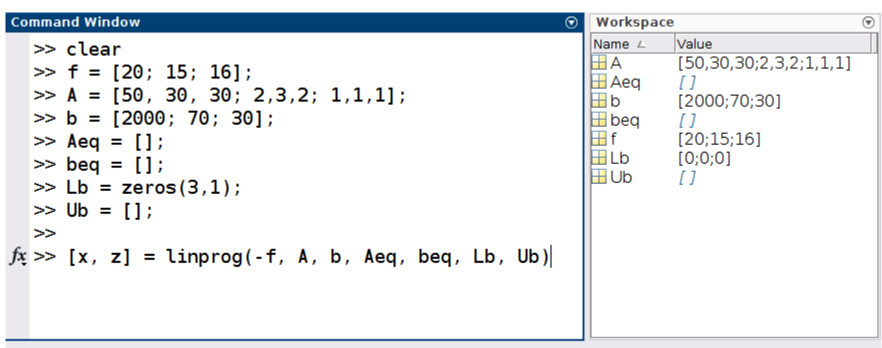
encuentra la solución del problema

$$\begin{aligned} \min_{\mathtt{X}} \quad & \mathtt{f}^{\top}\mathtt{X} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathtt{A}\cdot\mathtt{X} \leq \mathtt{b} \\ & \mathtt{Aeq}\cdot\mathtt{X} = \mathtt{beq} \\ & \mathtt{Lb} \leq \mathtt{X} \leq \mathtt{Ub} \end{aligned}$$

En el caso que las cotas o restricciones no existan, se pueden meter como matrices vacías. Por ejemplo, si $\boldsymbol{x} \geq 0$, entonces `Lb = zeros(n,1)` y `Ub = []`.

1. Ejemplo: Resuelva el siguiente problema de P.L. con `linprog` en MatLab:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 20x + 15y + 16z \\ \text{sujeto a} \quad & 50x + 30y + 30z \leq 2000 \\ & 2x + 3y + 2z \leq 70 \\ & x + y + z \leq 30 \\ & x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,. \end{aligned}$$



a) ¿Cuál es el valor óptimo?

b) ¿Cuál es la solución óptima?

2. Resuelve el problema de las minas (ver las tareas de modulación en Capítulo 5) con MatLab.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 50x + 40y \\ \text{sujeto a} \quad & 0.75x + 0.25y \geq 36 \\ & 0.25x + 0.25y \geq 24 \\ & 0.5x + 1.5y \geq 72 \\ & 0 \leq x \leq 7 \cdot 24 \\ & 0 \leq y \leq 7 \cdot 24 \,. \end{aligned}$$

3. Considere el problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \,. \end{aligned}$$

Use su intuición geométrica para construir un problema para cada uno de los siguientes casos, que tenga la estructura anterior.

a) Que no tenga un punto factible.
b) Que tenga muchas soluciones óptimas.
c) Que tenga solución única.
d) Que no sea acotado.

Luego, resuelva sus problemas anteriores con `linprog` en MatLab (en Octave es `glpk`).

6. Teoremas fundamentales

En esta sección supondremos que tenemos un problema de P.L. en forma estándar.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Esto permitirá demostrar las conclusiones que hicimos en página 32. Los teoremas de esta sección se encuentran, por ejemplo en el libro de Luenberger and Ye [2008], y requieren la siguiente hipótesis.

(H1) *Hipótesis del "rank" completo.* La matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en la forma estándar tiene rango completo y es tal que $m < n$, es decir, las m filas de A son linealmente independientes.

Justificaciones:

- Suponga que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución y que $\operatorname{rank}(A) = \ell < \min(m,n)$.
  En este caso, la matriz extendida $[A|b]$ tiene $m-\ell$ filas ("ecuaciones") redundantes.
  Las correspondientes restricciones son redundantes.
- Por otro lado, suponga que conocemos $\boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0}$ tal que $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$. Entonces, como queremos minimizar debe existir $\boldsymbol{d} \in \operatorname{Null}(A)$ tal que $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} < 0$. Esto requiere un espacio nulo de dimensión positiva.

Definición 1.12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz que satisface **(H1)** con columnas $\{A_{:j}\}_{j=1}^n$. Sea $B \subseteq \{1,\ldots,n\}$ un conjunto de índices tal que $|B| = m$ y el subconjunto $\{A_{:j}\}_{j\in B}$ es una base en $\mathbb{R}^m$. Dado B definimos el conjunto $N \coloneqq \{1,\ldots,n\} \setminus B$.
A una solución $\tilde{\boldsymbol{x}}$ de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ le decimos

- *solución factible*, si $\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}$.
- *solución básica* cuando $\tilde{\boldsymbol{x}}_N = \boldsymbol{0}$, es decir, $\tilde{x}_j = 0$ para cada $j \in N$.

A una solución básica $\tilde{\boldsymbol{x}}$ le decimos

- *solución básica factible*, si $\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}$.
- *solución básica (factible) degenerada*, si existe $j \in B \colon \tilde{x}_j = 0$.

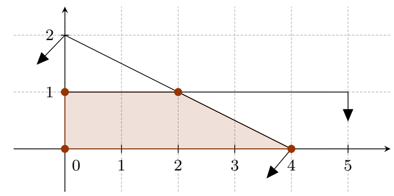
A una entrada $\tilde{x}_j\,(j \in B)$ le decimos *variable básica*.

Nota. Una solución básica satisface $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} = \sum_{j\in B} x_j A_{:j} \eqqcolon A_B \boldsymbol{x}_B$, pero no es necesariamente factible ni la solución óptima del problema de P.L., como lo veremos en el Ejemplo 1.9 .

Nota. Una base $\{A_{:j}\}_{j\in B}$ no es única, ya que un lema de Álgebra lineal permite cambiar una columna $k \in B$ por otra $\ell \in N$ cuando el conjunto $\{A_{:j}\}_{j\in B\setminus\{k\}} \cup \{A_{:\ell}\}$ es linealmente independiente. Veremos que esto se usa en las iteraciones del método Simplex donde los conjuntos B, N son dinámicos.

Ejemplo 1.9. La región factible del siguiente problema de P.L. esta dada en el dibujo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0\,. \end{aligned}$$



Introduciendo variables de holgura obtenemos el problema estándar correspondiente:

$$\begin{array}{lllllll} \text{minimizar} & x_1 & +x_2 & +0x_3 & +0x_4 & & \\ \text{sujeto a} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & 4 \\ & & x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0\ . \end{array}$$

El sistema anterior es de la forma $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene 2 filas y 4 columnas. Se puede observar que la hipótesis **(H1)** se cumple. Entonces, el número de columnas que pertenecen a una matriz básica es 2.

En seguida, mostraremos el teorema fundamental de programación lineal y un teorema que muestra que cada solución básica factible *(SBF)* es un vértice de C_F.

1. Las soluciones básicas factibles son:

$$\boldsymbol{x}^T = (0, 1, 2, 0)^T$$
$$\boldsymbol{x}^T = (2, 1, 0, 0)^T$$
$$\boldsymbol{x}^T = (4, 0, 0, 1)^T$$
$$\boldsymbol{x}^T = (0, 0, 4, 1)^T$$

Note que las primeras dos entradas indican las vértices en el dibujo.

2. Algunas soluciones factibles no-básicas:

$$\boldsymbol{x}^T = (1, 1, 1, 0)^T$$
$$\boldsymbol{x}^T = \left(2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^T \ .$$

3. Una solución básica (pues ocupa columnas linealmente independientes) pero no factible es

$$\boldsymbol{x}^T = (0, 2, 0, -1)^T \ .$$

En efecto, es solución básica ya que $\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ donde $A_B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ contiene la segunda y cuarta columna de la matrix A, de este modo $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{x}_{\{2,4\}} = A_B^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

$\uparrow$ día 5

TEOREMA 1.3 (Fundamental de la programación lineal).
Para el problema (1.4) *con una matriz* A *que satisface hipótesis **(H1)** tenemos:*

1. *Si hay una solución factible, entonces hay una solución básica factible* (SBF).

2. *Si hay una solución factible óptima, entonces hay una solución básica factible* (SBF) *óptima.*

DEMOSTRACIÓN. (de **1.**) Sean $\boldsymbol{a}_j \, (j = 1 \dots n)$ las columnas de A y $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ una solución factible, es decir, $x_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. Sin perdida de la generalidad (*s.p.g.*) suponga que exactamente las primeras p variables $x_i \, (i = 1 \dots p)$ son positivas y el resto es cero, es decir:

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + x_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b} \,. \tag{$\star_1$}$$

Ahora, queremos construir una SBF $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a partir de $\boldsymbol{x}$. Requerimos un conjunto de índices B con $|B| = m$ tal que $\{\boldsymbol{a}_j\}_{j \in B}$ es linealmente independiente *(LI)* y $A\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$.

De aquí hay dos casos: $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_p\}$ es LI o no lo es.

a) Sea $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_p\}$ LI, entonces $p \leq m$. Si $p = m$, estamos listos $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.
Si $p < m$, la hipótesis **(H1)** implica que podemos encontrar $(m - p)$ columnas de A tal que la unión de esos con $\{\boldsymbol{a}_j\}_{j=1}^p$ es LI y asignando el valor cero a las $(m - p)$ variables correspondientes da una SBF (degenerada) $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ con digamos s.p.g. $B = \{1, \dots, p\} \cup \{p + 1, \dots, m\}$.

b) Suponga que $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_p\}$ no es LI, entonces hay coeficientes $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + y_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0} \,. \tag{$\star_2$}$$

con $y_k > 0$ para un $k \in \{1, \dots, p\}$. Restamos $\varepsilon \cdot (\star_2)$ de la ecuación $(\star_1)$ para obtener:

$$(x_1 - \varepsilon y_1)\boldsymbol{a}_1 + \dots + (x_p - \varepsilon y_p)\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b} \,.$$

De aquí escogemos $\varepsilon \coloneqq \frac{x_\ell}{y_\ell}$ donde $\frac{x_\ell}{y_\ell} = \min\left\{\frac{x_i}{y_i} : y_i > 0\right\}$ para obtener

$$x_\ell - \varepsilon y_\ell = 0 \quad \text{y} \quad x_i - \varepsilon y_i \geq 0 \quad \text{para} \quad i \neq \ell \,.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}$ es solución factible con $(p - 1)$ variables positivas y la columna $\boldsymbol{a}_\ell$ ya no es requerida. Esto se puede continuar hasta que quede un conjunto LI (de columnas de A). Después, el conjunto final contendrá a lo más m columnas LI de A y la prueba se puede terminar como en el caso a).

□

Demostración. (de **2.**) Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ solución factible óptima, con s.p.g. (como arriba) $x_1, \dots, x_p > 0$. De nuevo hay dos casos.

(i) Sea $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^p$ LI, entonces la demostración se termina completando el conjunto (si necesario) a una base de $\mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{x}$ es una SBF (degenerada).

(ii) En el otro caso, existe un vector $(y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ de coeficientes que satisface la ecuación $(\star_2)$. Como en la prueba de 1) se requiere eliminar los coeficientes de las columnas lin. dependientes en la combinación lineal:

$$(x_1 - \varepsilon y_1)\boldsymbol{a}_1 + \ldots + (x_p - \varepsilon y_p)\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b}\,.$$

Para eso hay que mostrar que $\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y}$ también es solución factible óptima si ε es pequeño. Por lo cual, se requiere que el valor de la función objetivo no cambie, es decir

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y}\,.$$

Lo mostramos por contradicción. Suponga que $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} \neq 0$, entonces para cualquier ε positivo o negativo que satisfaga

$$\max\left\{-\infty, \frac{x_i}{y_i} \colon y_i < 0\right\} \leq \varepsilon \leq \min\left\{\infty, \frac{x_i}{y_i} \colon y_i > 0\right\} \qquad (\star_3)$$

la diferencia $\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y}$ es solución factible. Eso permite escoger un ε con el signo de $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y}$ y nos lleva a $\boldsymbol{c}^\top(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y}) < \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ lo cual contradice que $\boldsymbol{x}$ es solución óptima.
Ahora, hemos establecido que $\boldsymbol{c}^\top(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ y que $\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y}$ es solución factible (óptima). Si ε es un limite (finito) del intervalo $(\star_3)$, obtenemos una solución factible con menos variables positivas que también es óptima. Continuando como en la prueba de 1), reducimos p y llegamos a una SBF.

□

Nota. Teorema 1.3 reduce la tarea de resolver un problema de programación lineal a la búsqueda entre soluciones básicas factibles. Por lo tanto, seleccionamos m columnas de n y a lo sumo hay

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} < \infty$$

soluciones básicas.

¿Cómo interpretamos las soluciones básicas factibles geométricamente?
El Teorema 1.4 (abajo) muestra que cada SBF es un vértice y

$$|\{\text{ vértices de } C_F \ \}| = |\{\text{ soluciones básicas factibles de (1.5) }\}|.$$

Al demostrarlo y combinarlo con Teorema 1.3 confirmamos las conclusiones en página 32.

Ejercicio 1.6. Use los teoremas para demostrar:

- Demuestre: Si $C_F = \{\boldsymbol{x} \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} \neq \emptyset$, entonces existe (al menos) un vértice.
- Si hay una solución factible óptima, entonces hay una solución factible óptima que es un vértice de C_F.

TEOREMA 1.4 (Equivalencia entre vértices y soluciones básicas).
Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ *y* C_F *el conjunto de todas las soluciones (factibles) del sistema*

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \\ \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Entonces, un $\boldsymbol{x} \in C_F$ *es un punto extremo si y sólo si* $\boldsymbol{x}$ *es una SBF del sistema* (1.5).

DEMOSTRACIÓN. "$\Leftarrow$": S. p. g. supongamos que $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ es una SBF del sistema (1.5). Entonces $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ es linealmente independiente y

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}\,.$$

Ahora, supongamos que $\boldsymbol{x}$ no es vértice, es decir, existen puntos distintos $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in C_F$ y un número $0 < \alpha < 1$ tal que

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{z}\,.$$

Como las entradas de $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ son no negativas tenemos que $x_i = y_i = z_i = 0\,(i = m+1, \dots, n)$, puesto que cero no es combinación convexa de números positivos. Con eso llegamos a

$$y_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + y_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}\,.$$

y

$$z_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + z_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}\,.$$

Al restar esas igualdades y aplicar que $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ es linealmente independiente podemos deducir que $y_i = z_i = x_i\,(i = 1, \dots, m)$. En conclusión tenemos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ (una contradicción). Entonces $\boldsymbol{x}$ es un vértice de C_F.

"$\Rightarrow$": Sea $\boldsymbol{x}$ un vértice de C_F. Sin perdida de la generalidad $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ con $x_i > 0\,(i = 1, \dots, p)$. Entonces

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b}\,.$$

Debemos demostrar que las columnas $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_p\}$ son linealmente independientes. Supongamos lo contrario, es decir, existe una combinación lineal (no trivial) con coeficientes $y_i\,(i = 1, \dots, p)$ tal que

$$y_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + y_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0}\,.$$

Definimos $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y para ε que satisface

$$0 < \varepsilon \leq \min\left\{\left\{\frac{x_i}{y_i} : y_i > 0\right\} \cup \left\{\frac{x_i}{|y_i|} : y_i < 0\right\}\right\}$$

tenemos que $\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{y}$ son dos soluciones factibles distintas. Por lo tanto

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{y})$$

lo cual es una contradicción (ya que $\boldsymbol{x}$ si es vértice). Entonces $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_p\}$ tiene que ser linealmente independiente y por lo tanto, $\boldsymbol{x}$ es solución (factible) básica (degenerada si $p < m$). $\square$

Capítulo 2

El método Simplex

El algoritmo Simplex o método Simplex es el algoritmo más usado para resolver problemas de P.L. Fue desarollado por George Dantzig en 1947. A continuación describimos el método Simplex para nuestro problema estándar:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in C_F} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \qquad \text{con} \qquad C_F = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\colon A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0}\}\ .$$

El método encuentra el mínimo global de este problema y consiste en dos fases:

Fase I:

- Detecta si $C_F=\emptyset$ o $C_F\neq\emptyset$.
- En el caso, $C_F\neq\emptyset$ encuentra una solución básica factible (SBF) $\boldsymbol{x}_0=(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_N)\in C_F$ con

  $$\boldsymbol{b}=A_B\boldsymbol{x}_B+A_N\boldsymbol{x}_N \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$$

  y la regresa como resultado. Más adelante veremos como la forma de regresar la SBF depende de como se implementa o se describe el método.
- Conviene incluir la transformación del problema original a su forma estándar en la Fase I. A veces, eso simplifica encontrar $\boldsymbol{x}_0$.
- Típicamente se usa Fase II para resolver un problema auxiliar.

Fase II:

- A partir de la SBF $\boldsymbol{x}_0$, se construye una sucesión de vértices de C_F (soluciones básicas factibles) $\{\boldsymbol{x}_\ell\}_{\ell=0,1,2,\dots}$ tal que el valor de la función objetivo se reduce (o aumenta si maximizamos).

  Al cambio de una SBF a otra le decimos *paso*.

  De la sucesión de vértices solo se almacena la SBF más reciente.

↑ día 6

1. El procedimiento algebraico del método

El método Simplex (las dos fases) en el procedimiento algebraico despeja la SBF y el valor de la función objetivo en cada paso. Escribiendo lo anterior de forma abstracta, tenemos:

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$$

y

$$\begin{aligned} z \coloneqq \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^\top\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^\top\big(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N\big) + \boldsymbol{c}_N^\top\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} - \big(\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}A_N - \boldsymbol{c}_N^\top\big)\boldsymbol{x}_N \eqqcolon \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}_N^\top\boldsymbol{x}_N\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Veremos como funciona en el siguiente ejemplo. La Fase I, será inmediata ya que escogemos un problema original de la forma $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}$. Para ese tipo de problemas, las variables de holgura (en la forma estándar) son la primera SBF.

Nota. En general, se resuelve Fase I usando un problema auxiliar y resolviendolo con Fase II. Por lo tanto, empezamos con la descripción de Fase II.

Ejemplo 2.1. Aplicamos el método al siguiente problema original:

$$\begin{aligned} &\min && -3x_1 + 2x_2 \\ &\text{sujeto a} && -x_1 + 3x_2 \le 12\,, \quad x_1 + x_2 \le 8\,, \quad 2x_1 - x_2 \le 10 \\ &&& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_1,\, x_2 \ge 0\,. \end{aligned}$$

1. *Fase I: Transformar a la forma estándar, encontrar una SBF y despejar.*

Introducimos variables de holgura:

$$\begin{array}{llllllll} \min & z \coloneqq -3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = \begin{pmatrix}-3 & 2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & \begin{array}{rrrrrrr} -x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 12 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 8 \\ 2x_1 & -x_2 & & & +x_5 & = & 10 \\ & & x_1, & \ldots, & x_5 & \ge & 0\,. \end{array} \end{array}$$

Vemos que $(0,\, 0,\, 12,\, 8,\, 10)^\top$ es una SBF con $B = \{3,4,5\}$ y $N = \{1,2\}$. Puesto que, $b_i \ge 0$ y $x_1 = x_2 = 0$ es factible en el problema original.

Despejamos para obtener como resultado un *Diccionario*:

$$\begin{array}{rcrrr} z & = & 0 & -3x_1 & +2x_2 \\ \hline x_3 & = & 12 & +x_1 & -3x_2 \\ x_4 & = & 8 & -x_1 & -x_2 \\ x_5 & = & 10 & -2x_1 & +x_2 \\ \hline x_j & \ge & 0\,. \end{array} \tag{D1}$$

Nota: El conjunto de las variables básicas es importante en la implementación, en este caso $B = \{3,4,5\}$. En papel, el diccionario contiene toda la información.

2. *Fase II:* Como entrada tenemos un diccionario (resultado de Fase I).

Empezamos con $x_1 = x_2 = 0$, puesto que son variables no básicas. En la función objetivo la variable no básica x_1 tiene un coeficiente negativo (-3), es decir, aumentar x_1 reduce z.

Conservando $x_2 = 0$ vemos cuanto podemos aumentar x_1 sin violar la restricción $x_j \geq 0$ para $j \in \{1, \ldots, 5\}$. Si pedimos estas restricciones, entonces x_1 puede ser acotado:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_3 = 12 + x_1 &\quad\Longrightarrow\quad x_1 \geq 0 \\ 0 \leq x_4 = 8 - x_1 &\quad\Longrightarrow\quad x_1 \leq 8 \\ 0 \leq x_5 = 10 - 2x_1 &\quad\Longrightarrow\quad x_1 \leq 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, aumentando x_1 la variable x_5 es la primera que viola $x_j \geq 0$, es decir, la primera que sale del conjunto factible.

Notamos que si tomamos $x_1 = 2$ entonces obtenemos la solución factible $(2,\, 0,\, 14,\, 6,\, 6)$. Esta no es básica, ya que representamos $\boldsymbol{b}$ con 4 columnas en $\mathbb{R}^3$. Pero un paso del algoritmo, debe cambiar una SBF por otra, es decir, debe aumentar x_1 de tal manera que x_5 se anula y $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal de 3 columnas.

Entonces, tomando $x_1 = 5 > 0$, la variable *de entrada* x_1 será variable básica y x_5 (la variable *de salida*) será variable no básica (con valor $x_5 = 0$). Usando el diccionario (D1) la nueva solución básica factible es

$$\boldsymbol{x}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top = (5,\, 0,\, 17,\, 3,\, 0)^\top,\; B = \{1, 3, 4\}\,,\; N = \{2, 5\}\,.$$

Para aplicar el próximo paso de la Fase II dejamos la función objetivo y las variables básicas en términos de las no básicas x_2, x_5, es decir, construimos un diccionario. Con este fin, expresamos x_1 en términos de x_2, x_5 usando en la ecuación de x_5 :

$$x_5 = 10 - 2x_1 + x_2 \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 = 5 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_2\,.$$

Con esto el diccionario (D1) equivale a

$$\begin{array}{rcrrr} z & = & 0 & -3x_1 & +2x_2 \\ \hline x_3 & = & 12 & +x_1 & -3x_2 \\ x_4 & = & 8 & -x_1 & -x_2 \\ x_5 & = & 10 & -2x_1 & +x_2 \\ \hline x_j & \geq & 0\,. & & \end{array} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{rcrrr} z & = & -15 & +\frac{3}{2}x_5 & +\frac{1}{2}x_2 \\ \hline x_3 & = & 17 & -\frac{1}{2}x_5 & -\frac{5}{2}x_2 \\ x_4 & = & 3 & +\frac{1}{2}x_5 & -\frac{3}{2}x_2 \\ x_1 & = & 5 & -\frac{1}{2}x_5 & +\frac{1}{2}x_2 \\ \hline x_j & \geq & 0\,. & & \end{array} \qquad (D2)$$

Notamos que el nuevo valor objetivo (-15) es mejor. Además, tenemos un resultado como de Fase I, es decir, podemos aplicar otro paso de Fase II. En este (próximo) paso de Fase II, vemos que ningún coeficiente de las variables no básicas en la función objetivo es negativo, lo cual implica que hemos llegado a la solución óptima $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 0, 17, 3, 0)$ con valor óptimo -15.

La solución óptima del problema original es $(5,\, 0)^\top$ y el valor óptimo es -15.

Verifique gráficamente que hemos resuelto el problema:

Resumen del procedimiento algebraico.

1. Las variables del lado izquierdo de los diccionarios son variables básicas y las otras “no básicas”.

2. En cada paso se anula (al menos) una variable básica, “la *variable de salida* x_s” y una variable NO básica se hace positiva, “la *variable de entrada* x_e”.

3. La nueva SBF (vértice) tiene los índices básicos $B^+ = B \setminus \{s\} \cup \{e\}$ y usa las columnas $\{A_{:j}\}_{j \in B^+}$ que son linealmente independientes.

4. Cualquier variable NO básica puede entrar cuando su *coeficiente en la función objetivo* es *negativo* (cuando minimizamos) o *positivo* (cuando maximizamos).

5. Hemos encontrado una solución óptima cuando
   a) Minimizamos y no existe coeficiente negativo en la función objetivo.
   b) Maximizamos y no existe coeficiente positivo en la función objetivo.

2. Interpretación de coeficientes de la función objetivo

En el ejemplo vimos que los coeficientes de la función objetivo cambian en el proceso de optimización. Entonces, se puede hablar de costos o ahorros relativos (a la base usada). Para fijar notación, de aquí en adelante siempre usaremos el vector $\boldsymbol{r}_N$ definido en ecuación (2.1) por

$$\boldsymbol{r}_N^\top := \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} A_N - \boldsymbol{c}_N^\top \in \mathbb{R}^{1\times(n-m)}$$

y sus entradas serán *ahorros relativos* como en la siguiente interpretación.

2.1. Interpretación para el problema de la dieta.

Usando ecuación (2.1) reescribimos la función objetivo:

$$\begin{aligned} z = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} &= \alpha - (\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} A_N - \boldsymbol{c}_N^\top)\boldsymbol{x}_N && \text{donde} \quad \alpha := \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \alpha - \sum_{j\in N} (z_j - c_j) x_j && \text{donde} \quad z_j := \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} A_{:j} \\ &= \alpha - \sum_{j\in N} r_j x_j \end{aligned}$$

donde c_j es el costo del producto j en el mercado, *z_j es un costo sintético (o precio sombra)* del producto j, es decir, el costo para conseguir los nutrientes $A_{:j}$ del producto j através de los productos en la base. Lo siguiente justifica que $A_B^{-1}A_{:j}$ es un vector de unidades de productos básicos:

$$\begin{aligned} &A_B\colon \{\text{vectores de unidades de productos básicos}\} \to \{\text{Vectores de nutrientes}\} \\ &\implies A_B^{-1}(\text{vector de nutrientes}) = (\text{vector con unidades de productos básicos})\,. \end{aligned}$$

Concluimos

a) si $c_j < z_j \iff r_j > 0$, entonces, ahorramos dinero comprando el producto $j \in N$ y dejando de comprar un producto $i \in B$. Por lo cual, $r_j > 0$ se puede interpretar como el *ahorro relativo.*

b) Si $z_j \leq c_j \iff r_j \leq 0$, entonces gastamos menos si comemos productos de la Base para conseguir los nutrientes del producto j lo cual implica no comprar j.

3. Procedimiento con tabla

El cambio de variables en los diccionarios es un cambio de Gauss-Jordan y se simplifica cuando todas las variables están del mismo lado de la ecuación. Para esto nos servirá el siguiente resultado que muestra una equivalencia entre una SBF y un *tableau* asociado:

PROPOSICIÓN 2.1. *Suponga que* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *con* $(m \le n)$ *tiene rango completo y*

$$\boldsymbol{x} \in C_F \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\}$$

es SBF, es decir, tenemos un conjunto B *de índices de* m *columnas linealmente independientes. Las* x_j *con* $j \in B$ *son variables básicas y* $x_j = 0$ *para* $j \in N \coloneqq \{1, \dots, n\} \setminus B$. *Entonces, con* $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B; \boldsymbol{x}_N)$ *y* $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_B; \boldsymbol{c}_N)$ *tenemos que*

$$A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}\,, \quad \boldsymbol{x}_B \ge \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}. \tag{2.2}$$

Además, podemos representar $\boldsymbol{x}$ *y la función objetivo por el* tableau (factible)*:*

#Ecuación	*base*	z	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{x}_B$	*L.D.*
$1\dots m$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{0}$	H	I	$\boldsymbol{h}$
$m+1$	–	1	$\boldsymbol{r}_N^\top$	$\boldsymbol{0}^\top$	α

donde

$$\boldsymbol{h} \coloneqq A_B^{-1}\boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}\,, \quad H \coloneqq A_B^{-1}A_N\,, \quad \alpha \coloneqq \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{h} \qquad y \qquad \boldsymbol{r}_N^\top \coloneqq \boldsymbol{c}_B^\top H - \boldsymbol{c}_N^\top\,.$$

DEMOSTRACIÓN. La ecuación (2.2) es una forma de escribir $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y equivale a

$$z\boldsymbol{0} + H\boldsymbol{x}_N + I\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{h} = A_B^{-1}\boldsymbol{b}\,. \tag{2.3}$$

Como $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ (es factible) y $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ tenemos que $\boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{h}$. Además

$$\begin{aligned} z = \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^\top\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^\top\big(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N\big) + \boldsymbol{c}_N^\top\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} - \big(\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}A_N - \boldsymbol{c}_N^\top\big)\boldsymbol{x}_N \\ &= \alpha - \boldsymbol{r}_N^\top\boldsymbol{x}_N\,. \end{aligned}$$

Esta última ecuación equivale a

$$1z + \boldsymbol{r}_N^\top\boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{0}^\top\boldsymbol{x}_B = \alpha = \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{h}\,. \tag{2.4}$$

□

NOTA. Acerca del *tableau*:

- Lo que queda al lado izquierdo de la doble raya facilita leer la tabla.
  Es común no escribir las columnas de z y de las ecuaciones.
- La columna “L.D.” representa el lado derecho de las ecuaciones (2.3) y (2.4).
- Si la primera base es tal que $\boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{r}_N = -\boldsymbol{c}_N$ y $\alpha = 0$ en el *tableau* (inicial).
- Los pasos del método Simplex mezclan y cambian las columnas de la Identidad I y de H.

Hacemos el ejemplo del procedimiento algebraico para ver las diferencias. Note que otra vez la Fase I (el encontrar la SBF) se simplifica por la estructura del problema original $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$.

Ejemplo 2.2. A partir de un problema de P.L. ¿Cómo llegar al *tableau*?

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Transformamos a la forma estándar y encontramos una SBF:
En este caso, solo introducimos variables de holgura:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & z := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una primera SBF esta dada por

$$\boldsymbol{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} , \quad B = \{3, 4, 5\} , \quad A_B = I$$

y la Proposición 2.1 nos dice que $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x}_B$, $\boldsymbol{c}_B^\top = (0, 0, 0) \implies \boldsymbol{r}_N^\top = -\boldsymbol{c}_N^\top = (3, -2)$,

$$H = A_B^{-1} A_N = I^{-1}[A_{:1} A_{:2}] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el *tableau* inicial es:

#Ec.	base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$L.D.$
$E(1)$	x_3	0	-1	3	1	.	.	12
$E(2)$	x_4	0	1	1	.	1	.	8
$E(3)$	x_5	0	2	-1	.	.	1	10
$E(m+1) = Ahorro$	–	1	3	-2	0	0	0	0

Ahora que tenemos el *tableau* inicial, nos falta describir Fase II del método Simplex (para llegar a la solución óptima).

4. La Fase II del método Simplex (en general)

Para describir la versión general de la Fase II (del método Simplex), recordamos que la función objetivo tiene la forma

$$z = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \alpha - \boldsymbol{r}_N^\top \boldsymbol{x}_N \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{x}_N \in \mathbb{R}^{n-m} \ \text{ y } \ \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

La Fase II solo se puede aplicar cuando ya conocemos una SBF o un *tableau* con $\boldsymbol{h} \geq \boldsymbol{0}$.
Usamos la notacion de la Proposición 2.1 para describir la Fase II:

Algoritmo: Fase II (minimizar)

1. ¿Cuál es la variable no básica x_e $(e \in N)$ que entra (a la base)?
$\rightarrow$ escoger un índice $e \in N$ tal que $r_e > 0$.
Si no existe tal e, entonces $\boldsymbol{r}_N \leq \boldsymbol{0}$ y se ha encontrado una SBF óptima. ($\rightarrow$ STOP)

2. Dado $e \in N$. ¿Cuál es la variable (básica) x_s $(s \in B)$ que sale?
$\rightarrow$ encontrar un índice $s \in B$ tal que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = \min\{h_i/H_{ie} \colon H_{ie} > 0\}$,
donde $\tilde{s}$ es la entrada de $\boldsymbol{h}$ (fila en el *tableau*) asociada a x_s.
Si no existe tal s, entonces $H_{:e} \leq \boldsymbol{0}$ y el problema no esta acotado. ($\rightarrow$ STOP)

3. Cambiar x_s por x_e y regresar a paso **1**.

4.1. La Fase II con el *tableau*.

Aquí simplificamos el cambio de la variable de entrada x_e por la de salida x_s cuando trabajamos con el *tableau*:

#Ecuación	base	z	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{x}_B$	$L.D.$
$1 \ldots m$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{0}$	H	I	$\boldsymbol{h} \geq \boldsymbol{0}$
$m+1$	–	1	$\boldsymbol{r}_N^\top$	$\boldsymbol{0}^\top$	α

Dada esa representación y variables de entrada y salida $e \in N$ y $s \in B$, aplicamos operaciones elementales (a las $m+1$ filas) con el fin de convertir la columna $\binom{H_e}{r_e}$ al vector de base estándar que vale 1 en la fila asociada a x_s, digamos ecuación $\tilde{s}$. Esto se hace como sigue.

1. Definimos el pivote $p \coloneqq H_{\tilde{s}e}$

2. Dividimos la fila (de coeficientes) asociada a la ecuación de x_s entre el pivote p :

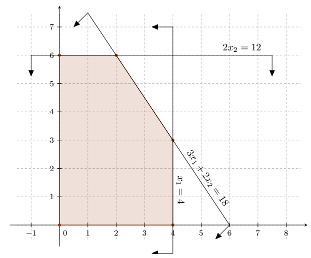
$$E^+(\tilde{s}) = \frac{E(\tilde{s})}{p}\,.$$

3. Anulamos las entradas de la columna $\binom{H_e}{r_e}$ con la operación elemental

$$E^+(i) = E(i) - H_{ie}E^+(\tilde{s}) \quad \text{para cada} \quad i \in \{1 \ldots m+1\} \setminus \{\tilde{s}\}\,.$$

EJEMPLO 2.3. Sea el problema

$$\begin{array}{lrrl} \text{minimizar} & -3x_1 & -5x_2 & \\ \text{sujeto a} & x_1 & & \leq \ 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq \ 0 \ . \end{array}$$



Al introducir variables de holgura (que serán las primeras básicas) llegamos a la tabla inicial. En este caso $\alpha = 0$ y $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{c}_N$ puesto que $\boldsymbol{c}_B = (0,\,0,\,0)^\top$:

#Ec.	base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$L.D.$
$E(1)$	x_3	0	1	0	1	.	.	4
$E(2)$	x_4	0	0	**2**	.	1	.	12
$E(3)$	x_5	0	3	2	.	.	1	18
$E(m+1) = Ahorro$	–	1	3	5	0	0	0	0

Escogemos la variable de entrada x_2, cuyo índice es $e = 2$, ya que $r_2 = 5$ es el máximo ahorro. Tomamos $s = 4$ ya que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = 6 = \min\left\{\frac{12}{2},\, \frac{18}{2}\right\}$, esta asociado a la variable x_4. El cambio da:

#Ec.	base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$L.D.$
$E^+(1)$	x_3	0	1	.	1	.	.	4
$E^+(2)$	x_2	0	0	1	.	$1/2$	.	6
$E^+(3)$	x_5	0	**3**	.	.	-1	1	6
$E^+(m+1)$	–	1	3	.	0	$-5/2$	0	-30

Escogemos $e = 1$, entonces $s = 5$ ya que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = 2 = \min\left\{\frac{4}{1},\, \frac{6}{3}\right\}$. El cambio da:

#Ec.	base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$L.D.$
$E^{++}(1)$	x_3	0	.	.	1	$1/3$	$-1/3$	2
$E^{++}(2)$	x_2	0	.	1	.	$1/2$	.	6
$E^{++}(3)$	x_1	0	1	.	.	$-1/3$	$1/3$	2
$E^{++}(m+1)$	–	1	.	.	0	$-3/2$	-1	-36

Ya no existe un coeficiente positivo de ahorro para las variables no básicas, es decir, hemos llegado a la solución óptima:

$$\boldsymbol{x}_B = (2,\,6,\,2)^\top,\ \boldsymbol{x}_N = (0,\,0)^\top \quad \text{mejor} \quad \boldsymbol{x}^\star = (2,\,6,\,2,\,0,\,0)^\top \quad \text{con} \quad z^\star = -36\,.$$

NOTA. Una implementación del algoritmo debe regresar la solución óptima del problema original, en este caso $(x_1, x_2) = (2, 6)$ con valor óptimo $z^\star = -36$. Debido a que al usuario del algoritmo no le interesa lo que pasa interiormente, el usuario no esta interesado en las variables artificiales.

NOTA. La columna asociada a z nunca cambia. Por lo tanto, no hay necesidad de escribirla. Además, no requerimos la columna de las ecuaciones.

↑ día 7

El siguiente ejemplo muestra que las variables básicas no estarán en orden natural.

Ejemplo 2.4. Sea el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Al introducir variables de holgura (que serán las primeras básicas) llegamos a la tabla inicial.
En este caso $\alpha = 0$ y $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{c}_N$ puesto que $\boldsymbol{c}_B = (0,\, 0,\, 0)^\top$:

#Ec.	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*L.D.*
$E(1)$	x_4	1	1	2	1	.	.	9
$E(2)$	x_5	1	1	−1	.	1	.	2
$E(3)$	x_6	−1	1	**1**	.	.	1	4
Ahorro	–	−1	−1	4	0	0	0	0

Escogemos $e = 3$, entonces $s = 6$ ya que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = 6 = \min\left\{\frac{9}{2},\, \frac{4}{1}\right\}$, esta asociado a la variable x_6. El cambio da:

#Ec.	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*L.D.*
$E^+(1)$	x_4	**3**	−1	.	1	.	−2	1
$E^+(2)$	x_5	.	2	.	.	1	1	6
$E^+(3)$	x_3	−1	1	1	.	.	1	4
Ahorro$^+$	–	3	−5	0	0	0	−4	−16

Escogemos $e = 1$, entonces $s = 4$ ya que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = \min\left\{\frac{1}{3}\right\}$. El cambio da:

#Ec.	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*L.D.*
$E^{++}(1)$	x_1	1	−1/3	.	1/3	.	−2/3	1/3
$E^{++}(2)$	x_5	.	2	.	.	1	1	6
$E^{++}(3)$	x_3	.	2/3	1	1/3	.	1/3	13/3
Ahorro^{++}	–	0	−4	0	−1	0	−2	−17

Ya no existe un coeficiente positivo de ahorro para las variables no básicas, llegamos a la solución óptima:

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/13 \end{bmatrix} \quad \text{mejor} \quad \boldsymbol{x}^\star = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{13}{3} & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}^\top \quad \text{con} \quad z^\star = -17\,.$$

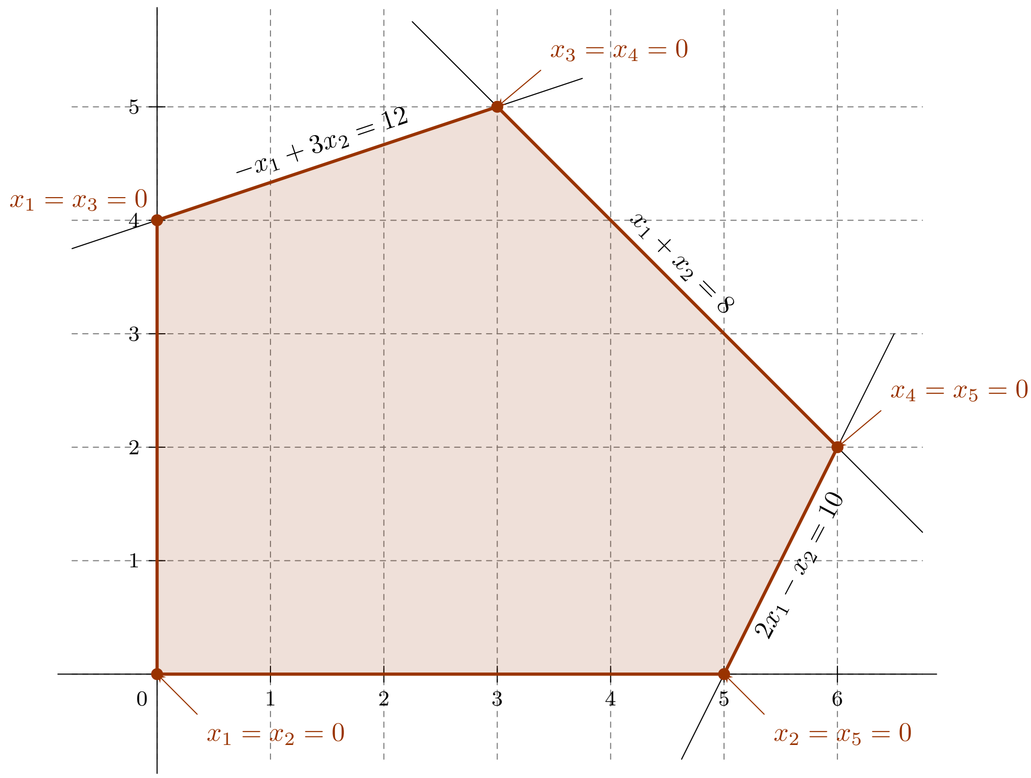
EJEMPLO. *Variables no básicas son igual a cero en los vértices.*

Consideramos el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & x_1 + x_2 \le 8 \\ & 2x_1 - x_2 \le 10 \\ & x_1,\, x_2 \ge 0\,. \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{llllllll} \min & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} & -x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 12 \\ & x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 8 \\ & 2x_1 & -x_2 & & & +x_5 & = & 10 \\ & & & & & x_1,\, \ldots,\, x_5 & \ge & 0\,. \end{array}$$

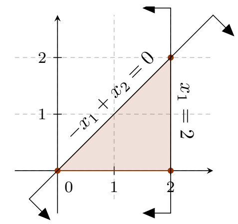
Su región factible junto con los vértices se encuentra en el siguiente dibujo.

Los variables no básicas estan indicados con igualdades a cero.



EJEMPLO 2.5 (Degenerado). Sea el problema

$$\begin{array}{lrl} \text{minimizar} & -x_2 & \\ \text{sujeto a} & -x_1 + x_2 & \leq 0 \\ & x_1 & \leq 2 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \ . \end{array}$$



Al introducir variables de holgura, la primera base es $B = \{3, 4\}$ con $\boldsymbol{c}_B = (0,\, 0)^\top$ y $A_B = I$. En este caso $\alpha = 0$ y $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{c}_N$ y de este modo llegamos a la tabla inicial:

#Ec.	base	x_1	x_2	x_3	x_4	$L.D.$
$E(1)$	x_3	-1	**1**	1	.	0
$E(2)$	x_4	1	.	.	1	2
Ahorro	–	0	1	0	0	0

Ya que $r_2 > 0$, entonces x_2 entra a la base y x_3 sale de la base, debido a que $s = 3$ pues $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = 0 = \min\left\{\frac{0}{1}\right\}$. El cambio da:

#Ec.	base	x_1	x_2	x_3	x_4	$L.D.$
$E^+(1)$	x_2	-1	1	1	.	0
$E^+(2)$	x_4	**1**	.	.	1	2
Ahorro$^+$	–	1	0	-1	0	0

Por $r_1 > 0$, entra x_1 a la base y x_4 sale de la basem ya que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = \min\left\{\frac{2}{1}\right\}$. El cambio da:

#Ec.	base	x_1	x_2	x_3	x_4	$L.D.$
$E^{++}(1)$	x_2	.	1	1	1	2
$E^{++}(2)$	x_1	1	.	.	1	2
Ahorro^{++}	–	0	0	-1	-1	-2

Ya que $\boldsymbol{r}_N \leq 0$, llegamos a la solución óptima: $(x_1, x_2) = (2,\, 2)^\top$ con $z^\star = -2$.

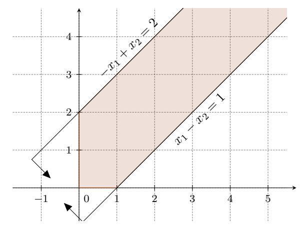
NOTA. Geométricamente, un *tableau* es no degenerado, si el vértice (la SBF asociada), se encuentra en la intersección de exactamente $|N|$ hiperplanos de la forma $x_j = 0$ para cada $j \in N$. En este ejemplo el origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$ es intersección de $3 > 2$ hiperplanos:

$$x_1 = 0\,,\ x_2 = 0\,,\ \underbrace{-x_1 + x_2 = 0}_{\iff x_3 = 0}\ .$$

Aplicamos el método a un problema no acotado.

Ejemplo 2.6 (No acotado). Sea el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 - x_2 \le 1 \\ & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0\,. \end{aligned}$$



Al introducir variables de holgura (que serán las primeras básicas) llegamos a la tabla inicial. En este caso $\alpha = 0$, $A_B = I$ y $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{c}_N = (1, 0)$ puesto que $\boldsymbol{c}_B = (0,\, 0)^\top$:

#Ec.	base	x_1	x_2	x_3	x_4	$L.D.$
$E(1)$	x_3	**1**	-1	1	.	1
$E(2)$	x_4	-1	1	.	1	2
Ahorro	–	1	0	0	0	0

Solo $r_1 > 0$, entonces entra x_1 y solo hay una entrada de la columna $H_{:1}$ positiva. Por lo tanto, la variable x_3 sale. El cambio da:

#Ec.	base	x_1	x_2	x_3	x_4	$L.D.$
$E^+(1)$	x_1	1	-1	1	.	1
$E^+(2)$	x_4	.	.	1	1	3
Ahorro$^+$	–	0	1	-1	0	-1

Ya que hay un ahorro relativo positivo asociado a la variable x_2, esto implica que la variable x_2 entra, pero no hay variable de salida ya que $H_{:2} \le 0$ lo que implica que el PROBLEMA ES NO ACOTADO.

Nota. Nos aprovechamos del *tableau* para encontrar una dirección de descenso, en la cual C_F no es acotado. Conservamos $x_3 = 0$ y vemos del *tableau* que $1x_1 - 1x_2 = 1$ y $1x_4 = 3$. Despejando de forma general, obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - x_2 H_{:2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Conservamos $x_3 = 0$ y agrandamos el vector para obtener el siguiente rayo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \underbrace{x_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]}_{\text{Direc. de descenso}}$$

Los puntos en este rayo obtenidos para $x_2 > 0$ son soluciones factibles (pero no básicas) y se ve que C_F (del problema original) no es acotado en la dirección de descenso $(1, 1)^\top$. Por lo tanto, cuando $x_2 \to \infty \implies x_1 \to \infty \implies \min -x_1 \to -\infty\,.$

4.2. Sobre la selección de variables.

No fuimos muy específicos sobre como escoger las variables de entrada y de salida.

1. Cuando existen múltiples ahorros relativos positivos, la variable que entra no es única.

2. Además, en los ejemplos que vimos la variable de salida era única, es decir, no se anulan dos variables básicas en el mismo paso. En el caso que se anulan dos (o más) variables básicas (empate) llegamos a una SBF **degenerada** y se tiene que escoger cual variable básica sale. ¿Importa cuál se escoge? $\to$ sí (lo veremos más adelante en el Ejemplo 2.7).

Existen varias "reglas" y opciones. Introducimos dos de ellos, para mostrar que puede pasar.

Regla 1: mayor descenso y pivote

1. selecciona la variable de entrada mediante

$$e\colon r_e = \max\{r_j\colon r_j > 0\,,\ j \in N\} \qquad \text{(mayor descenso/ahorro)}$$

2. selecciona la variable de salida mediante

$$s\colon \frac{h_{\tilde{s}}}{H_{\tilde{s}e}} = \min\left\{\frac{h_i}{H_{ie}}\colon H_{ie} > 0\,,\ i \neq \tilde{s}\right\} \quad \text{y} \quad H_{\tilde{s}e} \geq H_{\tilde{s}'e} \text{ si } \tilde{s} \text{ no es único.}$$

(Usa el mayor pivote si $\tilde{s}$ no es único, con el fin de reducir errores de redondeo.)

Regla 2: de Bland (Bland [1977], índice más bajo)

1. selecciona la variable de entrada mediante

$$e := \min\{e \in N\colon r_e > 0\} \qquad \text{(el índice más bajo)}$$

2. selecciona la variable de salida mediante

$$s := \min\left\{s \in B\colon \frac{h_{\tilde{s}}}{H_{\tilde{s}e}} \leq \frac{h_i}{H_{ie}} \text{ para } H_{ie} > 0\,,\ i \neq \tilde{s}\right\} \qquad \text{(el índice más bajo)}$$

Ejercicio 2.1. Use la Regla 1 (de mayor descenso) para resolver el siguiente problema:

$$\begin{array}{lrrcl}
\min & -3x_1 - 5x_2 & & & \\
\text{sujeto a} & x_1 & & \leq & 3 \\
 & & x_2 & \leq & 6 \\
 & -x_1 & +x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1,\, x_2 \geq 0\,. & & &
\end{array}$$

Vas a requerir 3 pasos, pero usando la regla de Bland, es decir, tomando x_1 como variable de entrada en el primer paso hubieras terminado en 2 pasos.

Resuelve el mismo problema con la regla de Bland.

4.3. La Fase II termina.

4.3.1. El caso no-degenerado.

Hemos visto que una SBF esta definida por el conjunto B que contiene los índices de las columnas de A que usa. Por Proposición 2.1 conocer una SBF equivale a conocer un *tableau* factible con $\boldsymbol{h} = A_B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}$, digamos $\mathcal{T}(B)$. Recuerde que si $\boldsymbol{x}_B > \boldsymbol{0}$, entonces la SBF no es degenerada. La siguiente definición simplifica la prueba del teorema abajo.

DEFINICIÓN 2.1. Un *tableau* $\mathcal{T}(B)$ es *degenerado* si su última columna "$\boldsymbol{h}$" contiene (al menos) un cero. Un $\mathcal{T}(B)$ es *no-degenerado* cuando "$\boldsymbol{h} > \boldsymbol{0}$". Un problema de P.L. es *no-degenerado* si todas sus *tableaus* $\mathcal{T}(B)$ son no-degenerados.

TEOREMA 2.2. *Suponga que un problema de P.L. es no-degenerado y que tiene $C_F \neq \emptyset$. Entonces, empezando en cualquier tableau no-óptimo $\mathcal{T}(B)$, la función objetivo decae estrictamente en cada paso. Además, después de un número finito de pasos la Fase II (del método Simplex) termina identificando una SBF óptima o una dirección de descenso no acotada.*

DEMOSTRACIÓN. En cada paso, tenemos un *tableau* no-óptimo, óptimo, o no acotado. En los últimos dos casos la Fase II ha terminado. En el caso del *tableau* no-óptimo, la siguiente transformación ocurre:

#Ecuación	base	z	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{x}_B$	$L.D.$
$1\ldots m$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{0}$	H	I	$\boldsymbol{h}$
$m+1$	–	1	$\boldsymbol{r}^\top$	$\boldsymbol{0}^\top$	α

$\mapsto$

base	z	$\boldsymbol{x}_{N_+}$	$\boldsymbol{x}_{B_+}$	$L.D.$
$\boldsymbol{x}_{B_+}$	$\boldsymbol{0}$	H_+	I	$\boldsymbol{h}^+$
–	1	$\boldsymbol{r}_+^\top$	$\boldsymbol{0}^\top$	α_+

Describimos el paso. Para cada $e \in N$ tal que $r_e > 0$, existe un único $s \in B$ (en ecuación $\tilde{s}$) tal que

$$H_{\tilde{s}e} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{h_{\tilde{s}}}{H_{\tilde{s}e}} < \frac{h_i}{H_{ie}}, \qquad (\text{ para cada renglón } i \neq \tilde{s}\,).$$

En otro caso, se anularía una entrada de $\boldsymbol{h}_+$, pero esto no es posible por la hipótesis de ser no-degenerado. Se define la nueva ecuación $E^+(\tilde{s}) = E(\tilde{s})/H_{\tilde{s}e}$, lo cual implica $h_{\tilde{s}}^+ = h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} > 0$ y de la última ecuación $E^+(m+1) = E(m+1) - r_e E^+(\tilde{s})$ evaluamos el valor objetivo:

$$\alpha_+ = \alpha - r_e h_{\tilde{s}}^+ < \alpha \qquad (\text{ ya que } r_e > 0\,).$$

Así llegamos en cada paso a una nueva (distinta) SBF con un valor objetivo más pequeño. Como el número de posibles soluciones básicas factibles es finito este proceso termina. □

NOTA. En algunos libros, se suele poner la última ecuación (asociada al ahorro relativo) no al último en la tabla, sino al principio, en el siguiente ejemplo, la primera fila en la tabla es la asociada al ahorro relativo.

4.3.2. El caso general.
En general, usando algunas reglas, problemas degenerados pueden tener ciclos infinitos.

Ejemplo 2.7. (Construido de Hall and McKinnon [2000]).
Un ciclo infinito usando regla 1 (mayor descenso y pivote).

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
z	1	7/8	−13/4	−3/8	0	0	0
x_5	**1**	1/2	−2	−1/2	1	.	0
x_6	−6	−2	6	1	.	1	0

Vemos que x_1 entra, x_5 sale (único coeficiente positivo). El cambio da:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
z	.	3/8	−5/4	1/8	−1	0	0
x_1	**1**	1/2	−2	−1/2	1	.	0
x_6	.	**1**	−6	−2	6	1	0

Luego x_2 entra, x_6 sale (coeficiente positivo mayor). El cambio da:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
z	.	.	1	7/8	−13/4	−3/8	0
x_1	**1**	.	1	1/2	−2	−1/2	0
x_2	.	**1**	−6	−2	6	1	0

Se observa que la tabla después de 2 pasos es la misma que la original movida cíclicamente 2 posiciones a la derecha. Después, de 6 pasos llegaremos a la matriz original. Por eso, el método Simplex con Regla 1 entra a un ciclo infinito en este ejemplo.

Ejercicio 2.2. Resuelve el problema del Ejemplo 2.7 con la regla de Bland.

Teorema 2.3. *Suponga que un problema de P.L. tiene $C_F \neq \emptyset$. Entonces, empezando en cualquier tableau $\mathcal{T}(B)$ y usando la regla de Bland, la Fase II (del método Simplex) termina después de un número finito de pasos identificando una SBF óptima o una dirección de descenso no acotada.*

Demostración. Ver [Ferris et al., 2007, p. 65f] o Bland [1977]. □

4.4. La Fase II revisada (en forma matricial).

Esta forma del método Simplex resuelve en cada paso solamente 3 sistemas lineales y no actualiza ningún *tableau*. Recordamos que, dado los índices B de una SBF tenemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N\,, \\ \alpha &= \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b}\,, \\ \boldsymbol{r}_N^\top &= (\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}A_N - \boldsymbol{c}_N^\top)\,. \end{aligned}$$

Queremos evitar o simplificar el cálculo de las inversas de las matrices A_B.

Algoritmo: Fase II revisada (minimizar)

1. ¿Cuál x_e $(e \in N)$ entra? $\rightarrow$ escoger $e \in N$ tal que $r_e > 0$.
Para eso, hay que calcular los ahorros relativos, es decir, resolver

$$A_B^\top \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c}_B \iff \boldsymbol{\lambda}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}$$

y evaluar $\boldsymbol{r}_N^\top = (\boldsymbol{\lambda}^\top A_N - \boldsymbol{c}_N^\top)$. Si $\boldsymbol{r}_N \leq \boldsymbol{0}$, se ha encontrado una SBF óptima $\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ con valor óptimo $\alpha = \boldsymbol{\lambda}^\top\boldsymbol{b}$. ($\rightarrow$ STOP)

2. Dado $e \in N$. ¿Cuál x_s $(s \in B)$ sale?
$\rightarrow$ encontrar $s \in B$ tal que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = \min\left\{\dfrac{h_i}{H_{ie}} : H_{ie} > 0\,,\ i \neq \tilde{s}\right\}$.
Para eso, solo nos interesan

$$\boldsymbol{h} = A_B^{-1}\boldsymbol{b} \qquad \text{y la columna} \qquad H_{:e} = A_B^{-1}A_{:e}.$$

Si $H_{:e} \leq \boldsymbol{0}$, entonces el problema no esta acotado. ($\rightarrow$ STOP)

3. Actualizar $B_+ = B \setminus \{s\} \cup \{e\}$, $N_+ = N \setminus \{e\} \cup \{s\}$ y regresar a punto **1** con $B := B_+$, $N := N_+$.

Nota. En cada iteración, ese proceso resuelve 3 veces un sistema (con A_B).

Nota. Una versión alterna de este algoritmo actualiza la inversa de A_{B_+} en cada paso y multiplica con la inversa en lugar de resolver sistemas. La actualización se hace en el punto 3 para la próxima iteración. Para poder hacer esto introducimos en el Lema 2.4 (abajo) la formula de Sherman-Morrison y describimos el cambio de las columnas. El método cambia una variable básica x_s por una no-básica x_e, este cambio se refleja en un cambio de la matriz básica, descrito por el mapeo $A_B \mapsto A_{B_+}$. Este mapeo cambia una columna $A_{:s}$ (ubicada en columna $\tilde{s}$ de A_B) por $A_{:e}$, es decir,

$$A_{B_+} = A_B + \big(A_{:e} - A_{:s}\big)\boldsymbol{e}_{\tilde{s}}^\top\,, \tag{2.5}$$

donde $\boldsymbol{e}_{\tilde{s}} \in \mathbb{R}^m$ es el vector canónico con uno en la posición $\tilde{s}$.

↑ día 8

4.4.1. ¿Cómo actualizar la inversa de A_B y porqué es invertible?
Primero vemos una formula para actualizar inversas.

LEMA 2.4 (Sherman–Morrison Formula). *Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertible, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$. Entonces, se tiene que $A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ es invertible si y solo si $\boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u} \neq -1$. Más aún, si $A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ es invertible, entonces*

$$\left(A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top A^{-1}}{1 + \boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u}}\,. \tag{2.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Bajo la condición $\boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u} \neq -1$ la formula (2.6) esta definida. Al multiplicar la expresión para la inversa con $A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ obtenemos la matriz identidad, lo que muestra la existencia de la inversa.

Por otro lado, si supongamos que $A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ es invertible, entonces para cualquier $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ se tiene que

$$\boldsymbol{0} \neq \Big(A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top\Big)A^{-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u} = (1 + \boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\,.$$

De donde se sigue que, $1 + \boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u} \neq 0\,.$ □

NOTA. La matriz $A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ se llama *rank-1 update* de A, puesto que $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ tiene rango 1.
La formula (2.6) también se conoce como *inverse update formula.*

EJERCICIO 2.3. Modificar el orden de las multiplicaciones en la formula (2.6) permite evaluarla en $\mathcal{O}(m^2)$ y en $\mathcal{O}(m^3)$ operaciones. ¿Cómo evaluar en $\mathcal{O}(m^2)$ operaciones?

El siguiente Corolario muestra que si la primera matriz A_B es invertible, entonces las matrices generadas por el mapeo (2.5), es decir, $A_{B_+} = A_B + \big(A_{:e} - A_{:s}\big)\boldsymbol{e}_{\tilde{s}}^\top$ son invertibles.

Corolario 2.5. *Sea* A_B *la primer matriz invertible. Entonces,*

$$A_{B_+} \text{ es invertible } \iff H_{\tilde{s}e} \neq 0\,.$$

Demostración. Sea $A_B \mapsto A_{B_+}$ el mapeo descrito en la ecuación (2.5).

Primero, supongamos que $H_{\tilde{s}e} \neq 0$. Dado que el método Simplex busca $H_{\tilde{s}e} > 0$ para hacer el cambio $x_e \leftrightarrow x_s$, suponemos que $H_{\tilde{s}e} > 0$. Entonces, aplicando el Lema 2.4 con $\boldsymbol{u} \coloneqq A_{:e} - A_{:s}$ y $\boldsymbol{v} \coloneqq \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}$ obtenemos

$$\boldsymbol{v}^\top A_B^{-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}^\top A_B^{-1}\big(A_{:e} - A_{:s}\big) = \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}^\top\big(H_{:e} - \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}\big) = H_{\tilde{s}e} - 1 > -1\,.$$

De lo anterior se sigue que $\boldsymbol{v}^\top A_B^{-1}\boldsymbol{u} > -1$ y en consecuencia, la matriz A_{B_+} también es regular. En conclusión, partiendo de una matriz A_B regular, todas la matrices construidas por este mapeo serán regulares.

Supongamos ahora que A_{B_+} es invertible. El Lema 2.4 dice que si A_{B_+} es invertible entonces, $-1 \neq \boldsymbol{v}^\top A_B^{-1}\boldsymbol{u} = H_{\tilde{s}e} - 1$, por lo cual $H_{\tilde{s}e} \neq 0$. Eso termina la prueba. □

4.4.2. Reinversión y otras técnicas.

Por errores de redondeo la inversa “acumulada” de A_B, digamos $\tilde{A}_B^{-1}$, puede alejarse de la inversa exacta. Por lo tanto, en la computadora verificamos que $\|\boldsymbol{b} - A_B\boldsymbol{x}_B\|$ es pequeño, donde $\boldsymbol{x}_B \coloneqq \tilde{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$. Cuando este residuo excede una tolerancia, recalculamos la inversa $(\tilde{A}_B^{-1} \coloneqq A_B^{-1})$ (“reinversión”) y después de nuevo usamos Sherman-Morrison hasta que lo mismo ocurre.

Hay más técnicas. Por ejemplo, mantener actual una descomposición LU de A_B, ver por ejemplo Luenberger and Ye [2008].

5. Complejidad computacional

El caso peor *(worst case)*: exponencial, ver ejemplo de Klee-Minty (proyecto).

En el caso promedio *(average case)*: polinomial.

6. La Fase I del método Simplex

Durante la Fase I, usamos C_F como el conjunto factible del problema original y Ω como el conjunto factible de un problema auxiliar que será definido dependiendo del caso.

6.1. El caso de puras desigualdades.

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ y el problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.7}$$

entonces $C_F := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}\,.$

Con variables de holgura $\boldsymbol{w}^\top = \big(x_{n+1},\, \dots,\, x_{n+m}\big)$ tenemos el problema equivalente:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} \quad & A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,, \end{aligned} \tag{$\widetilde{2.7}$}$$

donde el conjunto factible es $\widetilde{C}_F := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}^{n+m} \colon A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}\}\,.$

Ejercicio 2.4. Demuestre que

- $C_F \neq \emptyset \iff \widetilde{C}_F \neq \emptyset$.
- $\boldsymbol{x}^\star \in C_F$ es solución óptima de (2.7) si y sólo si $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{w}^\star) \in \widetilde{C}_F$ es solución óptima de ($\widetilde{2.7}$).

Para realizar la Fase I diferenciamos entre dos casos.

6.1.1. El caso sencillo: $\boldsymbol{0} \in C_F \iff \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$.

Ya vimos este caso, aquí lo formalizamos. En este caso, la primera SBF es $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b})$, es decir, $B = \{n+1, \dots, n+m\}\,,\ N = \{1, \dots, n\}$ y se puede continuar con Fase II para ($\widetilde{2.7}$).

6.1.2. El otro Caso: $\boldsymbol{0} \notin C_F \iff \exists i \colon b_i < 0$.

Ya que la técnica del caso sencillo no funciona, definimos un problema auxiliar. La idea es hacer el vector $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ factible. Esto se logra restando una *variable artificial* positiva x_0 suficiente grande de las desigualdades. Una opción para nuestro problema (2.7) es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_0 \\ \text{sujeto a} \quad & A\boldsymbol{x} - x_0\mathbb{1} \leq \boldsymbol{b} \\ & x_0 \geq 0,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ es el vector de unos y

$$\Omega := \big\{(\boldsymbol{x}, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon A\boldsymbol{x} - x_0\mathbb{1} \leq \boldsymbol{b},\ (\boldsymbol{x}, x_0) \geq \boldsymbol{0}\big\}\ ,$$

es el conjunto factible de (2.8).

Nota. Alcanzaría restar x_0 solo en las desigualdades donde la entrada $b_i < 0$.

LEMA 2.6. *El problema* (2.8) *tiene solución óptima* $(\boldsymbol{x}^\star, x_0^\star) \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Como $(\mathbf{0}, y_0) \in \Omega$ donde $y_0 := |\min_i b_i| = \max_i(-b_i)$ el conjunto $\Omega \neq \emptyset$. La función objetivo esta acotada inferiormente por cero. Por lo tanto, no existen direcciones factibles de descenso, en las cuales Ω no esta acotado. □

LEMA 2.7. *El problema auxiliar* (2.8) *tiene solución óptima* $(\boldsymbol{x}^\star, 0)$ *si y sólo si* $C_F \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Suponga que $(\boldsymbol{x}^\star, 0)$ es solución óptima de (2.8), entonces $\boldsymbol{x}^\star \in C_F$.

Por otro lado, suponga que $\hat{\boldsymbol{x}} \in C_F$, entonces $(\hat{\boldsymbol{x}}, 0)$ es solución óptima de (2.8). □

Describimos el algoritmo: El objetivo de Fase I es encontrar una SBF del problema $(\widetilde{2.7})$. Primero, encontramos la solución óptima del problema auxiliar (2.8) la cual existe por Lema 2.6 . Conviene empezar con $x_0 = -\big[\min_i b_i\big]$ como variable básica. En un ejemplo con el *tableau* (abajo) veremos como esto funciona. Luego, usando Lema 2.7 analizamos la solución óptima $(\boldsymbol{x}^\star, x_0^\star)$. Si $x_0^\star > 0$, entonces $C_F = \emptyset$. Pero, si $x_0^\star = 0$, entonces $\boldsymbol{x}^\star \in C_F$. Para poder defnir una SBF del problema $(\widetilde{2.7})$ resolvemos (2.8) con variables de holgura.

Algoritmo: ¿Cómo iniciar Fase I para "$\leq$"?

1. Introducir variables de holgura $\boldsymbol{w} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ nos da el problema auxiliar:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad x_0 \\ &\text{sujeto a} \qquad A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{w} - x_0\mathbb{1} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \boldsymbol{w} \geq \mathbf{0},\ x_0 \geq 0. \end{aligned} \tag{$\widetilde{2.8}$}$$

Notar que $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$ es una solución básica del problema $(\widetilde{2.8})$, pero no es factible ya que existe $b_i < 0$. Note la equivalencia $(\widetilde{2.8}) \sim (2.8)$ por Ejercicio 2.4 .

2. Al aumentar x_0, las variables básicas $\boldsymbol{w}$ se hacen positivas, sea $x_{n+\tilde{s}}$ la última variable de holgura que se hace positiva y sea $b_{\tilde{s}} := \min\{b_i : i = 1 \dots m\}$.

3. Cambiando x_0 por $x_{n+\tilde{s}}$ obtenemos una SBF de $(\widetilde{2.8})$.
Actualizar nos lleva a un *tableau* factible, es decir, la primera SBF para $(\widetilde{2.8})$

$$B = \{n+1, \dots, n+m\} \setminus \{n+\tilde{s}\} \cup \{0\}.$$

4. De aquí continuamos con la Fase II para resolver el problema auxiliar $(\widetilde{2.8})$.
Si $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{w}^\star, x_0^\star)$ es tal que $x_0^\star = 0$, entonces se puede definir una SBF $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{w}^\star)$ de $(\widetilde{2.7})$.

NOTA. En el siguiente caso no hace falta empezar la Fase I. Si existe un renglón $A_{i:} \geq \mathbf{0}$ con $b_i < 0$ entonces la desigualdad $A_{i:}\boldsymbol{x} \leq b_i$ no tiene solución $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, es decir, $C_F = \emptyset$. Pero, en problemas reales bien modelados no debe ocurrir.

El "punto 5". ¿Cómo iniciamos Fase II para el problema original?

Por Lema 2.6 , el punto 4 (la Fase II) llegará a una SBF óptima del problema auxiliar $(\widetilde{2.8})$:

$$\begin{array}{c} z^\star + \boldsymbol{r}_N^\top \boldsymbol{x}_N = \alpha^\star \\ \hline \boldsymbol{x}_B^\star + H\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{h}^\star \\ \hline \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \text{(donde, } \boldsymbol{x} \text{ contiene } \boldsymbol{w} \text{ y } x_0 \text{)}.$$

De aquí hay 3 casos.

C1. Si $x_0 > 0$ (variable básica), entonces por el Lema 2.7 el $C_F = \emptyset$ del problema original.

C2. Si x_0 no es variable básica, entonces $B \subset \{1, \ldots, n+m\}$ y $x_0 = 0 = \alpha^\star$.
Al notar que $(\widetilde{2.7})$ coincide con $(\widetilde{2.8})$ cuando $x_0 = 0$, tenemos una SBF de $(\widetilde{2.7})$.
Por lo tanto, eliminamos la variable x_0 (la columna asociada) del *tableau* (de $\boldsymbol{r}_N$ y H).
Finalmente, cambiamos la función objetivo por la del problema original $(\widetilde{2.7})$, *i.e.*

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{h}^\star - (\boldsymbol{c}_B^\top H - \boldsymbol{c}_{N\setminus\{0\}}^\top)\boldsymbol{x}_{N\setminus\{0\}}\,.$$

De aquí, iniciamos la Fase II.

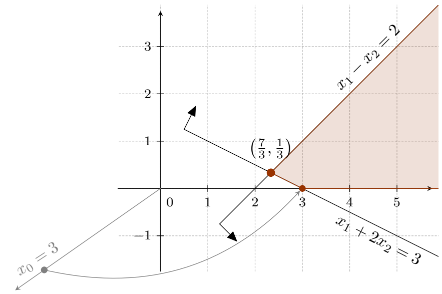
C3. Si x_0 es variable básica y $x_0 = 0$, el problema $(\widetilde{2.8})$ es degenerado.
$\therefore$ el sistema $A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$ requiere a lo mas $(m-1)$ coef. positivos.
$\therefore$ $\boldsymbol{b} \in V :=$ span $\{(m-1)$ columnas de $(A|I)\}$.
$\therefore$ existe una columna e de $(A|I)$ que no esta en V, pues $rango(A|I) = m$.
$\therefore$ podemos cambiar x_0 por x_e para una $e \in N \subset \{1, \ldots, n+m\}$.
¿Cómo se hace? Sin perdida de la generalidad x_0 esta en la última fila:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{B\setminus\{0\}} \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}^\star_{B\setminus\{0\}} \\ 0 \end{pmatrix} - H\boldsymbol{x}_N$$

La última fila de H tiene (al menos) una entrada $\neq 0$, esa será en la entrada H_{me}. Así llegamos a una SBF (degenerada) con índices $B \subset \{1, \cdots, n+m\}$. De aquí hacemos lo mismo como en el caso C2.

EJEMPLO 2.8.

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 8x_1 + 10x_2 \\ \text{sujeto a} & -x_1 + x_2 \le -2 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ & x_1\,,\ x_2 \ge 0\,. \end{array}$$



Solución: Se ve que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ no es factible. Multiplicamos las restricciones con (-1) para obtener un sistema "$\le$" con $b_i < 0$. Por lo tanto, nuestro problema auxiliar es

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_0 \\ \text{sujeto a} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_4 & x_0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ & x_1\,, \dots, x_4\,,\ x_0 \ge 0\,. \end{array}$$

Tomamos primero las variables de holgura como base $B = \{3, 4\}$ (que no es factible) y usando Proposición 2.1 construimos un *tableau* (no factible), donde $\boldsymbol{c}_B = \mathbf{0}$, $\alpha = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{r}_N = -\boldsymbol{c}_N$:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	L.D.
x_3	-1	1	1	.	-1	-2
x_4	-1	-2	.	1	$\mathbf{-1}$	-3
z	0	0	0	0	-1	0

Con este *tableau* es sencillo hacer el cambio que pide punto **3** del algoritmo.
Para obtener el primer *tableau* factible, cambiamos x_0 por x_{2+2}, ya que $b_2 = -3 < -2 = b_1$:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	L.D.
x_3	.	3	1	-1	.	1
x_0	$\mathbf{1}$	2	.	-1	1	3
z	1	2	0	-1	0	3

Ahora, estamos en el punto **4** y seguimos con Fase II para el problema auxiliar.

Viendo que $\alpha > 0$ y que existe $r_j > 0$ podemos reducir α.

Con regla de Bland, x_1 entra, x_0 sale. El cambio da

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	L.D.
x_3	.	3	1	-1	.	1
x_1	$\mathbf{1}$	2	.	-1	1	3
z	0	0	0	0	-1	0

La Fase I termina con $B = \{3, 1\}$, $N = \{2, 4, 0\}$, $\boldsymbol{x}_B = (x_3, x_1) = (1, 3)^\top = \boldsymbol{h}$. Hemos obtenido una SBF para el problema original con variables de holgura $(3, 0, 1, 0)^\top$ (se termina Fase I).

Ahora, seguimos con Fase II (para el problema original). Primero, ignoramos la columna relacionada con x_0, ya que no es básica. Observe que ya conocemos la primera parte del *tableau* asociado a la SBF obtenida. Lo que falta es solo el renglón para la función objetivo original:

$$\boldsymbol{c}_N^\top = (c_2, c_4) = (10, 0)\,, \quad \boldsymbol{c}_B^\top = (c_3, c_1) = (0, 8)\,, \quad \alpha = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{h} = (0, 8)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 24\,,$$

$$\boldsymbol{r}_{\{2,4\}}^\top = -\boldsymbol{c}_N^\top + \boldsymbol{c}_B^\top H_{\{2,4\}} = -(10,\, 0) + (0,\, 8)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (6,\, -8)\,.$$

Actualizando, obtenemos el primer *tableau* factible del problema original (con var. de holgura):

base	x_1	x_2	x_3	x_4	L.D.
x_3	.	**3**	1	-1	1
x_1	1	2	.	-1	3
z	0	6	0	-8	24

De aquí se aplica Fase II:

Escogemos la variable de entrada x_2, cuyo indice $e = 2$, ya que $r_2 = 6$ es el ahorro positivo. Tomamos $s = 3$ ya que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = \min\left\{\frac{1}{3},\, \frac{3}{2}\right\}$, esta asociado a la variable x_3. El cambio da:

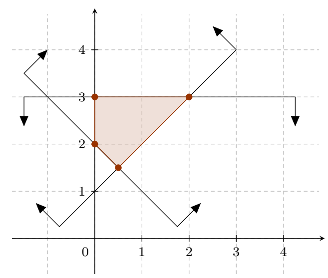
base	x_1	x_2	x_3	x_4	L.D.
x_2	.	**1**	$1/3$	$-1/3$	$1/3$
x_1	1	.	$-2/3$	$-1/3$	$7/3$
z	0	.	-2	-6	22

la cual fase II termina en la SBF óptima $\boldsymbol{x}_B = (x_2, x_1) = (1/3,\, 7/3)$ y $z^\star = 22$.

↑ día 9

Ejemplo 2.9. Este ejemplo se encuentra resuelto en [Bazaraa et al., 2011, p.169], pero en dicho libro se encuentra resuelto usando dos variables artificiales. Poniendo solamente una variable artificial, en este ejemplo se reducen considerablemente las operaciones y los cambios de variables a efectuar como veremos a continuación. El problema es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1\,,\ x_2 \geq 0\,. \end{aligned}$$



Solución: Multiplicando las primeras desigualdades con (-1) obtenemos las restricciones en forma $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$. Restamos x_0 donde $b_i < 0$, para obtener nuestro problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_0 \\ \text{sujeto a} \quad & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_5 & x_0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & x_1\,, \ldots, x_5\,,\ x_0 \geq 0\,. \end{aligned}$$

o en tabla (no factible, $B = \{3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{r}_N^\top = -\boldsymbol{c}_N^\top = -(c_1, c_2, c_0)$):

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	L.D.
x_3	-1	-1	1	.	.	$\mathbf{-1}$	-2
x_4	1	-1	.	1	.	-1	-1
x_5	0	1	.	.	1	0	3
z	0	0	0	0	0	-1	0

Cambiamos x_0 por x_{2+1} pues $b_1 = -2 < -1 = b_2 < 3 = b_3$. El cambio da la primera tabla factible:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	L.D.
x_0	1	**1**	-1	.	.	1	2
x_4	2	.	-1	1	.	.	1
x_5	0	1	.	.	1	0	3
z	1	1	-1	0	0	0	2

Ahora, estamos en el paso 4 y seguimos con Fase II para el problema auxiliar. Buscamos sacar x_0 de la base lo más rápido posible. Para x_2 como variable de entrada, x_0 sale. El cambio da:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	L.D.
x_2	1	1	-1	.	.	1	2
x_4	2	.	-1	1	.	.	1
x_5	-1	.	1	.	1	-1	1
z	0	0	0	0	0	-1	0

La Fase I termina con $B = \{2, 4, 5\}$, $N = \{1, 3\}$, $\boldsymbol{x}_B = (x_2, x_4, x_5) = (2, 1, 1)^\top = \boldsymbol{h}$. Es decir tenemos una SBF para el problema original con variables de holgura (se termina Fase I). Observe que en la figura que representa a su conjunto factible, después de la primera fase nos encontramos en el punto $(x_1, x_2) = (0, 2)$.

Para seguir con Fase II (para el problema original), ignoramos la columna relacionado con x_0 y calculamos el renglón para la función objetivo original:

$$\boldsymbol{c}_N^\top = (c_1, c_3) = (1, 0)\,, \quad \boldsymbol{c}_B^\top = (c_2, c_4, c_5) = (-2, 0, 0)\,, \quad \alpha = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{h} = (-2, 0, 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4\,,$$

$$\boldsymbol{r}_{\{1,3\}}^\top = -\boldsymbol{c}_N^\top + \boldsymbol{c}_B^\top H_{\{1,3\}} = -(1,\, 0) + (-2,\, 0,\, 0)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-3,\, 2)\,.$$

Actualizando, obtenemos el primer tableau factible del problema original (con var. de holgura):

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
x_2	1	1	-1	.	.	2
x_4	2	.	-1	1	.	1
x_5	-1	.	**1**	.	1	1
z	-3	0	2	0	0	-4

De aquí se aplica Fase II:

Escogemos la variable de entrada x_3, $(e = 3)$ ya que $r_3 = 2$ es un ahorro positivo. Luego, $s = 5$, $(\tilde{s} = 3)$ ya que $h_{\tilde{s}}/H_{\tilde{s}e} = \min\left\{\frac{1}{1}\right\}$, es la única división posible y esta asociado a la variable x_5. El cambio da:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
x_2	.	1	.	.	1	3
x_4	1	.	.	1	1	2
x_3	-1	.	1	.	1	1
z	-1	0	0	0	-2	-6

la cual fase II termina en la SBF óptima $\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_2) = (0,\, 3)$ y $z^\star = -6$.

Conclusión: Hemos visto que la Fase I para problemas del tipo "$\leq$" solo requiere una variable artificial x_0 para hacer $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (en los variables originales) factible. La misma idea funciona para restricciones mixtas del tipo "$\leq$" y "$\geq$".

6.2. Fase I (general). Vimos que la técnica de una variable artificial sirve para restricciones del tipo " $<$, $\leq$, $\geq$, $>$ ", pues multiplicando ciertas restricciones con (-1) nos quedan solo " $<$, $\leq$ ". ¿Qué hacer con problemas que tienen igualdades como restricciones?

Igualdades son más complicadas en el sentido que solo se puede sumar cero a un lado sin violarlas. Por lo tanto, nuestro problema auxiliar requiere una variable artificial por cada igualdad. Se obtiene el siguiente algoritmo.

Algoritmo: Fase I (general)

1. S.p.g. suponga que el problema está en forma estándar

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

(Para obtener $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ multiplique la igualdad i con el signo de b_i.)

2. Introducir variables artificales $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m_{\geq \boldsymbol{0}}$ y definir el problema auxiliar

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \textstyle\sum_{i=1}^m y_i = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y} \\ &\text{sujeto a} \qquad A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $\mathbb{1}^\top = (1, \ldots, 1)$. Ese tiene la primera SBF $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

3. En términos de variables no básicas tenemos:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x} \\ \hline z = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{b} - (\mathbb{1}^\top A)\boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \end{array}$$

4. Empezar con Fase II y

- cada vez que una variable artificial y_i sale de la base eliminamos esa variable.
- Si al final queda una variable (básica) $y_r > 0$, el problema original (2.9) tiene $C_F = \emptyset$.

  Ejercicio 2.5. Demuestre: $\boldsymbol{x} \in C_F$ de (2.9) $\iff$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ es solución de (2.10).

- En otro caso quedan variables básicas del tipo $y_r = 0$. Para cada r :
  - Si $H^\star_{r:} = \boldsymbol{0}$, entonces la ecuación $\#r$ en el sistema original es linealmente dependiente (la matriz A no tenía rango completo). En este caso, eliminamos el renglón $\#r$ y la columna asociada a y_r.
  - Si $\exists e\colon H^\star_{re} \neq 0$, entonces cambiamos y_r por x_e y después eliminamos la variable y_r (su columna).

Con este proceso llegamos a una SBF con $B \subset \{1, \ldots, n\}$ del problema original (2.9). Después de cambiar la función objetivo por la original podemos empezar con Fase II.

EJEMPLO 2.10.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_2 - x_3 = -2 \\ & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Dado que no es sencillo obtener una SBF, aplicamos Fase I, para igualdades. Después, de multiplicar la 2^a ecuación por (-1) e introducir variables artificiales llegamos al problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & y_1 + y_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 + y_1 = 4 \\ & -2x_2 + x_3 + y_2 = 2 \\ & x_1\,,\ \dots\,,\ x_3\,,\ y_1,\, y_2 \geq 0\,. \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow$$

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	L.D.
y_1	1	3	1	1	.	4
y_2	.	-2	1	.	1	2
z	0	0	0	-1	-1	0

La primera SBF es $\boldsymbol{x}_B = (y_1, y_2) = (4,\, 2)$. Note que la tabla arriba no es un *tableau* asociado a la SBF, ya que los ahorros relativos de variables básicas deben ser ceros. Para obtener el primer *tableau* factible sumamos los primeros m renglones al último renglón. Esto equivale al punto **3** (del algoritmo), ya que dejamos la función objetivo en términos de $\boldsymbol{x}_N = (x_1, x_2, x_3)$, es decir, calculamos $\boldsymbol{c}_N = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{c}_B = \mathbb{1}$, los ahorros relativos $\boldsymbol{r}_N^\top = \mathbb{1}^\top A_N$ y el valor objetivo $\alpha = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{b}$. El resultado :

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	L.D.
y_1	1	3	1	1	.	4
y_2	.	-2	**1**	.	1	2
z	1	1	2	.	.	$6 = \alpha$

es una tabla factible para el problema auxiliar y nos deja iniciar Fase II. Tomando la regla de mayor descenso x_3 entra y y_2 sale:

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	L.D.
y_1	**1**	5	.	1	-1	2
x_3	.	-2	1	.	1	2
z	1	5	.	.	-2	$2 = \alpha$

Tomando la regla de Bland x_1 entra y y_1 sale:

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	L.D.
x_1	1	5	.	1	-1	2
x_3	.	-2	1	.	1	2
z	.	.	.	-1	-1	$0 = \alpha$

Llegamos a $z^\star = 0$, es decir, $C_F \neq \emptyset$ con $\boldsymbol{x}^\top = (x_1,\, x_2,\, x_3) = (2,\, 0,\, 2) \in C_F$.

¿Es la solución óptima? Construimos la función objetivo del problema original en términos de las variables no-básicas. En este caso, $\boldsymbol{x}_N = (x_2)$ y

$$\boldsymbol{r}_N^\top = r_2 = \boldsymbol{c}_B^\top H - \boldsymbol{c}_N^\top = (-1,\, 0)\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - (-2) = -3\,,$$

es decir el único ahorro relativo es negativo. Por lo tanto, esa SBF es la solución óptima del problema original.

↑ día 10

7. El método de la gran M

Este método combina Fase I y II, lo explicamos para problemas de minimizar.

La *idea* es definir un problema auxiliar cuyo conjunto factible $\Omega \neq \emptyset$ "contiene a C_F." Cada variable artificial (introducida para hacer $\Omega \neq \emptyset$) se suma a la función objetivo con un costo alto $M \gg 0$ (una "multa"). Si $M \gg 0$ es suficientemente grande y $C_F \neq \emptyset$, entonces las variables artificiales se hacen NO básicas durante el proceso de minimización. Entonces, $C_F \neq \emptyset$ y el problema original puede tener solución óptima o ser no acotado.

Ventaja: Evita el cambio de la función objetivo al terminar la Fase I.

Desventaja: No se sabe que tan grande debe ser $M \gg 0$.

ADVERTENCIA: Si M no es suficientemente grande el método produce resultados falsos.

Abajo, definimos los problemas auxiliares y después veremos un ejemplo para cada problema auxiliar.

El caso de puras desigualdades. "$\leq$"
Del lado izquierdo el problema original con conjunto factible C_F.
Del lado derecho el problema auxiliar con Ω (y multa).

$$\begin{array}{llcll} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & \qquad\qquad & \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + M y_0 \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} & & \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} - y_0 \mathbb{1} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} & & & y_0 \geq 0\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

Comentarios:

- El problema auxiliar solo se requiere cuando existe $b_i < 0$.
- Es suficiente con restar y_0 solo en las desigualdades donde la entrada $b_i < 0$.
- $\boldsymbol{x} \in C_F \implies (\boldsymbol{x}, 0) \in \Omega$.
- $\Omega \neq \emptyset$, ya que $\big(\boldsymbol{0}, -[\min_i(b_i)]\big) \in \Omega$.
- El problema auxiliar se resuelve con variables de holgura. La primera SBF usa $m-1$ variables de holgura y la variable artificial y_0. La variable de holgura que sale es $x_{n+\tilde{s}}$ donde $\tilde{s} = \arg\min_i \{b_i\}$.
  $\therefore$ Empezamos con Fase II.
- Si la variable artificial y_0 se hace cero o NO básica, entonces se puede eliminar y continuar sin cambios. En este caso, la minimización (Fase II) determinará una solución óptimo o que el problema no esta acotado. En el otro caso, si la Fase II termina y $y_0 > 0$ es variable básica, entonces (suponiendo que M es suficientemente grande) se deduce que C_F es vacío.

El caso general. "$=$"
Del lado izquierdo el problema original con conjunto factible C_F.
Del lado derecho el problema auxiliar con Ω (y multa).

$$\begin{array}{llcll}
\text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & \qquad & \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + M\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y} \\
\text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & & \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}$$

Aquí, sin pérdida de generalidad $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$.

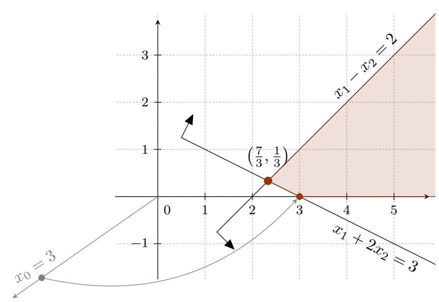
Comentarios:

- $\boldsymbol{x} \in C_F \implies (\boldsymbol{x}, 0) \in \Omega$.
- $\Omega \neq \emptyset$, ya que $\big(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\big) \in \Omega$.
- La primera SBF es $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. $\therefore$ Empezamos con Fase II.
- Cada variable artificial y_i que se hace NO básica, se puede eliminar y continuar sin cambios. Si todas las variables artificiales se hacen NO básicas, entonces la minimización (Fase II) determinará la solución óptima o que el problema (original) no es acotado. En el caso que la Fase II termina con alguna variable artificial positiva, se deduce (suponiendo que M es suficientemente grande) que C_F es vacío.

Ejemplos. El primer ejemplo es para el caso con puras desigualdades, el segundo para el caso de igualdades. Repetimos ejemplos que ya hicimos para ver la diferencia.

Ejemplo 2.11.

$$\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 8x_1 + 10x_2 \\
\text{sujeto a} & -x_1 + x_2 \leq -2 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & x_1\,,\ x_2 \geq 0\,.
\end{array}$$



Solución: Multiplicamos las restricciones con (-1) para obtener un sistema "$\leq$". Se ve que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ no es factible (existe $b_i < 0$). Por lo tanto, nuestro problema auxiliar es

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && 8x_1 + 10x_2 + My_0 \\ &\text{sujeto a} && \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_4 & y_0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &&& x_1\,,\ldots,x_4\,,\ y_0 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Por la teoría la primera SBF será $\boldsymbol{x}_B = (x_3, y_0)$. Para evitar la inversión de A_B escribimos el *tableau* (no factible) y después lo hacemos factible con el cambio de x_4 por y_0. La última fila representa $z - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = 0$ donde $\boldsymbol{c}^\top = (8, 10, 0, 0, M)$:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	y_0	L.D.
x_3	-1	1	1	.	-1	-2
x_4	-1	-2	.	1	$\mathbf{-1}$	-3
z	-8	-10	0	0	$-M$	0

Cambiar y_0 por x_4 (pues $b_2 < b_1$ y $b_2 < 0$) resulta en el primer *tableau* (factible):

base	x_1	x_2	x_3	x_4	y_0	L.D.
x_3	.	3	1	-1	.	1
y_0	$\mathbf{1}$	2	.	-1	1	3
z	$M-8$	$2M-10$	0	$-M$	0	$3M$

Ahora, si $M > 8$, entonces y_0 puede salir (x_1 entra). El cambio suma $(8 - M)$ veces el segundo renglón al renglón de ahorros relativos y resulta en:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	y_0	L.D.
x_3	.	$\mathbf{3}$	1	-1	.	1
x_1	1	2	.	-1	1	3
z	0	6	0	-8	$8-M$	24

Como $M > 8$, y_0 ya no entra. De aquí en adelante podemos quitar la columna asociada a y_0. Todavía, existe un ahorro relativo positivo. $\therefore$ entra x_2 y sale x_3, ya que $1/3 < 3/2$.

base	x_1	x_2	x_3	x_4	y_0	L.D.
x_2	.	$\mathbf{1}$	$1/3$	$-1/3$	.	$1/3$
x_1	1	.	$-2/3$	$-1/3$	1	$7/3$
z	0	0	-2	-6	$8-M$	22

El método termina en la SBF óptima $\boldsymbol{x}_B = (x_2, x_1) = (1/3,\, 7/3)$ y $z^\star = 22$.

EJEMPLO 2.12.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_2 - x_3 = -2 \\ & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Después, de multiplicar la 2^a ecuación por (-1) tenemos $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$. Dos igualdades requieren dos variables artificiales. El problema auxiliar con multas es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 - 2x_2 + My_1 + My_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 + y_1 = 4 \\ & -2x_2 + x_3 + y_2 = 2 \\ & x_1\,,\ \ldots\,,\ x_3\,,\ y_1,\ y_2 \geq 0\,. \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow$$

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	L.D.
y_1	1	3	1	1	.	4
y_2	.	-2	1	.	1	2
z	1	2	0	$-M$	$-M$	0

La primera SBF es $\boldsymbol{x}_B = (y_1, y_2) = (4,\, 2)$, Pero nos falta dejar la función objetivo en términos de las variables NO básicas (los ahorros relativos de y_1, y_2 deben ser ceros). Tenemos que sumar M veces cada ecuación a la última fila, eso es justo lo que hace

$$\boldsymbol{r}_N^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} A_N - \boldsymbol{c}_N^\top = M\mathbb{1}^\top (A_{:1}, A_{:2}, A_{:3}) - (-1, -2, 0)$$

ya que $\boldsymbol{x}_N = (x_1, x_2, x_3)$ y $\alpha = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{h} = M\mathbb{1}^\top \boldsymbol{h} = 6M$. El resultado es el *tableau*:

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	L.D.
y_1	1	3	1	1	.	4
y_2	.	-2	**1**	.	1	2
z	$M+1$	$M+2$	$2M$	.	.	$6M$

que corresponde a la SBF $\boldsymbol{x}_B = (y_1, y_2)$. Tomando la regla de mayor descenso x_3 entra y y_2 sale:

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	L.D.
y_1	**1**	5	.	1	-1	2
x_3	.	-2	1	.	1	2
z	$M+1$	$5M+2$	.	.	$-2M$	$2M$

Tomando la regla de Bland x_1 entra y y_1 sale:

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	L.D.
x_1	1	5	.	1	-1	2
x_3	.	-2	1	.	1	2
z	.	-3	.	$-M-1$	$1-M$	-2

Cada variable artificial es NO básica. Por lo tanto, hemos encontrado una SBF en C_F, es decir, $C_F \neq \emptyset$. Además, los ahorros relativos cumplen $\boldsymbol{r}_N \leq \boldsymbol{0}$ y entonces hemos encontrado una solución óptima, $\boldsymbol{x}_\star^\top = (x_1,\, x_2,\, x_3) = (2,\, 0,\, 2) \in C_F$ con $z^\star = -2$.

Capítulo 3

Dualidad

Asociado a cada problema de P.L. existe otro problema de P.L. denominado *problema dual (PD)*. Este tiene propiedades que están fuertemente ligadas al problema original. Para diferenciar el problema original del dual, al problema original se le denomina *problema primal (PP)*.

Empezaremos este capítulo con el siguiente cuento, el cuál nos muestra una aplicación de un problema dual. Este cuento fue proporcionado por el profesor Tapen Sinha.

Estaban dos árabes en el desierto y apuestan lo siguiente:

Árabe 1: Te apuesto a que mi camello es más lento que el tuyo.

Árabe 2: A ver, demuestralo!

Se montan inmediatamente a sus camellos y media hora después están parados y sudando arriba de sus camellos.

Llega una tercera persona y les pregunta ¿Qué están haciendo?

Ambos árabes responden "probando que mi camello es más lento".

La tercera persona responde "así no van a terminar", pero yo les resuelvo su problema.

Les dice una frase que resuelve su problema.

¿Qué les dice?

1. El problema dual

Empezamos con un ejemplo para motivar la definición de un problema dual. Describimos la forma de ir de un problema primal hacia su problema dual (asociado). Consideramos el problema

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & 3x_1 + 2x_2 & \\ \text{sujeto a} & -x_1 + 3x_2 \geq 6 & \#1 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 & \#2 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 5 & \#3 \\ & x_1\,,\ x_2 \geq 0\,. & \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ll} \text{Con} & \\ \text{solución óptima:} & \boldsymbol{x}_\star = \begin{pmatrix} 4.2 \\ 3.4 \end{pmatrix} \\ \text{y valor óptimo:} & z_\star = 19.4\,. \end{array}\right]$$

Cuando no conocemos la solución óptima (o no sabemos si existe), nos interesa una cota inferior (o superior) de la función objetivo, en este caso de $z(\boldsymbol{x}) \coloneqq 3x_1 + 2x_2$. Como minimizamos queremos una cota inferior. En este caso es simple. Multiplicamos las restricciones (con números no-negativos) y sumamos los resultados con el fin de obtener una función por debajo de $z(\boldsymbol{x})$. Por ejemplo, multiplicamos la restricción $\#1, \#2, \#3$ por $1,\ 0,\ 1$, respectivamente y sumamos para obtener:

$$\begin{aligned} & 11 = 1 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \leq 1(-x_1 + 3x_2) + 0(x_1 + x_2) + 1(2x_1 - x_2) \\ \Longleftrightarrow \quad & 11 \leq (2-1)x_1 + (3-1)x_2 = x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Notamos que $z(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 2x_2 \geq x_1 + 2x_2 \geq 11$, lo cual implica que 11 es UNA cota inferior.

Hacemos la siguiente pregunta: ¿Es 11 la mejor cota?
Para contestar eso, multiplicamos las restricciones $\#i$ por $y_i \geq 0$ para $i \in \{1,2,3\}$ y sumamos de nuevo:

$$\begin{aligned} & y_1(-x_1 + 3x_2) + y_2(x_1 + x_2) + y_3(2x_1 - x_2) \geq 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 \\ \Longleftrightarrow \quad & (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_1 + (3y_1 + y_2 - y_3)x_2 \geq 6y_1 + 4y_2 + 5y_3\,. \end{aligned}$$

Esta desigualdad nos da la cota inferior $(6y_1 + 4y_2 + 5y_3)$ para $z(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 2x_2$ si y solo si

$$3 \geq -y_1 + y_2 + 2y_3$$

$$2 \geq 3y_1 + y_2 - y_3$$

Por lo tanto, la mayor cota inferior para $z(\boldsymbol{x})$ (si existe) es valor óptimo del problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 \\ \text{sujeto a} & -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ & 3y_1 + y_2 - y_3 \leq 2 \\ & y_1,\ \ldots,\ y_3 \geq 0\,. \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ll} \text{Con} & \\ \text{y valor óptimo:} & z_\star = 19.4\,. \end{array}\right]$$

La siguiente definición sale del ejemplo anterior (o del método de multiplicadores de Lagrange).

Definición 3.1 (*Dual simétrico*). El *dual* del problema

$$\begin{bmatrix} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{Ps}$$

es
$$\begin{bmatrix} \text{maximizar} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{bmatrix} \tag{Ds}$$

Las restricciones del dual se pueden transponer, es decir, equivalen a $\boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top$.

Una propiedad fuerte de problemas duales es que "no pierden información".
De hecho el dual de (Ds) es (Ps) como muestra el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *"El dual del dual es el primal".*

Demostración. Por la definición, el dual de (Ps) es:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

Este problema equivale a:

$$\begin{aligned} -\ \text{minimizar} \quad & (-\boldsymbol{b}^\top)\boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} \quad & (-A^\top)\boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

lo cual tiene la estructura de (Ps) y con la definición obtenemos su dual:

$$\begin{aligned} -\ \text{maximizar} \quad & (-\boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} \quad & (-A)\boldsymbol{x} \leq (-\boldsymbol{b}) \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

Sacando los signos, ese problema equivale a

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} \quad & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,, \end{aligned}$$

que es el problema original. □

Definición 3.2. A un problema de P.L. lo llamáremos *primal (PP)* y a la variable $\boldsymbol{x}$ *variable primal*. En este caso, su dual será el *problema dual (PD)* y la variable $\boldsymbol{y}$ es la *variable dual*.

Más adelante daremos un ejemplo de la interpretación de las variables duales. Primero, deducimos el dual de nuestro problema estándar.

LEMA 3.2 (*Dual asimétrico*). *El dual del problema*

$$\left[\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \textit{sujeto a} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right] \tag{Pa}$$

$$\textit{es} \qquad \left[\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \textit{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}\,. \end{array}\right] \tag{Da}$$

Además, el dual de (Da) *es* (Pa).

DEMOSTRACIÓN. El problema (Pa) equivale a

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,, \end{array}$$

el cual tiene la estructura de (Ps) en Definición 3.1. Esa definición nos da el dual:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \\ \text{sujeto a} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{c}^\top \\ & \qquad\qquad \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{b}^\top (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \\ \text{sujeto a} & (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \\ & \qquad \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}\,, \end{array}\right]$$

Dado que cualquier real se puede expresar como la diferencia de dos valores positivos podemos definir $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ (como variable libre). Por lo tanto el último problema es (Da).

Ahora, usando el Teorema 3.1 podemos regresar de (Da) al problema original. Por lo cual el dual de (Da) es (Pa). □

1.1. Receta para dualizar.

Observando Definición 3.1 o Lema 3.2 se puede ver que si un problema de P.L. tiene m restricciones y n variables, entonces su dual tendrá m variables y n restricciones.

NOTA. Vimos que cada problema de P.L. se puede escribir en la forma estándar (Pa), así dualizar parece fácil. Pero interpretar las variables duales se vuelve más complicado cuando, por ejemplo, introducimos restricciones adicionales. Es decir, siempre cuando el problema inicial no es de ninguna de las formas (Ps), (Ds) o (Pa). Por lo tanto, a continuación presentamos reglas directas para definir el problema dual para cualquier problema de P.L.

Con la definición del problema dual y operaciones algebraicas se construye la siguiente tabla de correspondencia, Matousek and Gärtner [2007]. El problema primal corresponde a una columna, la otra (automáticamente) contiene el problema dual.

TABLA 1. Correspondencias entre problemas y sus duales

	Maximizar	Minimizar
variables	$x_1 \ldots x_j \ldots x_n$	$y_1 \ldots y_i \ldots y_m$
matriz	A	$A^\top$
lado derecho	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
función objetivo	max $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$	min $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$
restricción $\leftrightarrow$ variable	restricción $\#i$ es $\leq$	$y_i \geq 0$
	restricción $\#i$ es $\geq$	$y_i \leq 0$
	restricción $\#i$ es $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
variable $\leftrightarrow$ restricción	$x_j \geq 0$	restricción $\#j$ es $\geq$
	$x_j \leq 0$	restricción $\#j$ es $\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	restricción $\#j$ es $=$

NOTA. Los últimos dos renglones de la Tabla 1 también se conocen como la tabla de TUCKER.

NOTA. La Tabla 1 es muy compacta. Veremos como se define la restricción $\#j$.

En general existen restricciones de distintos tipos, es decir:

$$A^\top \boldsymbol{y} \simeq \boldsymbol{c} \qquad \text{con una relación} \qquad \simeq \in \{=, \leq, \geq\}^n ,$$

donde el tipo de restricción $\#j$ depende de la variable x_j en el siguiente sentido (en el problema dual de un problema de maximizar):

$$\begin{aligned} x_j \geq 0 &\implies A_{:j}^\top \boldsymbol{y} = (A^\top \boldsymbol{y})_j \geq c_j \implies \text{"}\simeq \text{ es } \geq\text{"} \\ x_j \leq 0 &\implies A_{:j}^\top \boldsymbol{y} = (A^\top \boldsymbol{y})_j \leq c_j \\ x_j \in \mathbb{R} &\implies A_{:j}^\top \boldsymbol{y} = (A^\top \boldsymbol{y})_j = c_j \end{aligned}$$

donde $A_{:j}$ es la j-ésima columna de la matriz A.

Ejercicio 3.1. Usando la Definición 3.1 o Lema 3.2 deduzca el dual del problema

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{sujeto a} & a \le x \le b\,. \end{array}$$

Ayuda: Tenemos dos restricciones y una variable. $\therefore$ *El dual tiene dos variables y una restricción.*

Ejemplo 3.1. Si consideramos el problema primal:

$$\begin{array}{lr} \max & 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ \text{sujeto a} & 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 = 2 \\ & x_1,\, \ldots,\, x_4 \ge 0\,. \end{array}$$

Al aplicar los pasos de la Tabla 1 obtenemos que el problema dual asociado al primal es:

$$\begin{array}{lr} \min & 2y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeto a} & 3y_1 + y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & -2y_1 \qquad \ge 2 \\ & y_1 - y_2 \ge 4 \\ & y_1,\, y_2 \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

Ejemplo 3.2. Deduzca el dual de :

$$\begin{array}{lr} \min & 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ \text{sujeto a} & 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 = 2 \\ & x_1,\, x_2 \ge 0,\, x_3 \le 0, x_4 \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

Usando la Tabla 1, su dual es:

$$\begin{array}{lr} \max & 2y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeto a} & 3y_1 + y_2 \le 6 \\ & y_1 + 3y_2 \le 6 \\ & -2y_1 \qquad \ge 2 \\ & y_1 - y_2 = 4 \\ & y_1,\, y_2 \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

$\uparrow$ día 11

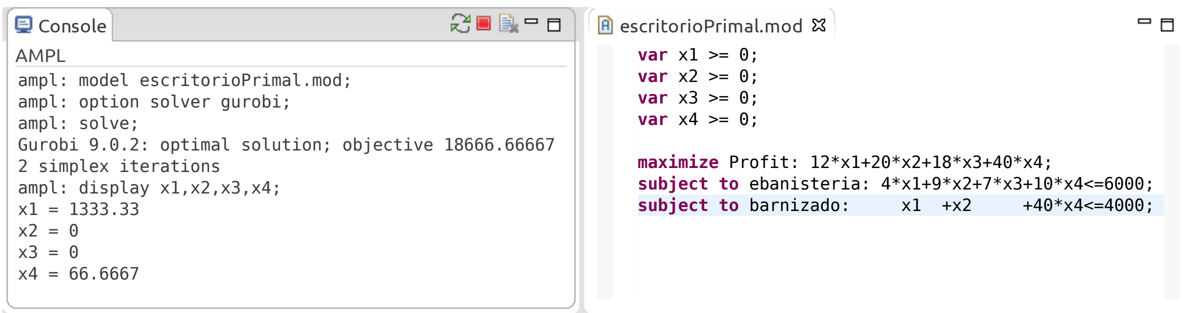
Gurobi: Una alternativa práctica.

A continuación se proporciona otro ejemplo, que usa el Teorema 3.1 (el dual del dual es el primal), que permite usar la Definición 3.1 al revés. Además, mostramos como se usa el *software* llamado **AMPL Gurobi**.

Ejemplo 3.3. Usaremos un modelo similar al resultado del ejemplo 1 de la Tarea 1, *i.e.*

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4 \\ \text{sujeto a} & 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 \leq 6000 \\ & \quad x_1 + x_2 \qquad\quad + 40x_4 \leq 4000 \\ & \qquad\qquad\qquad x_1, \ldots, x_4 \geq 0\,. \end{array}$$

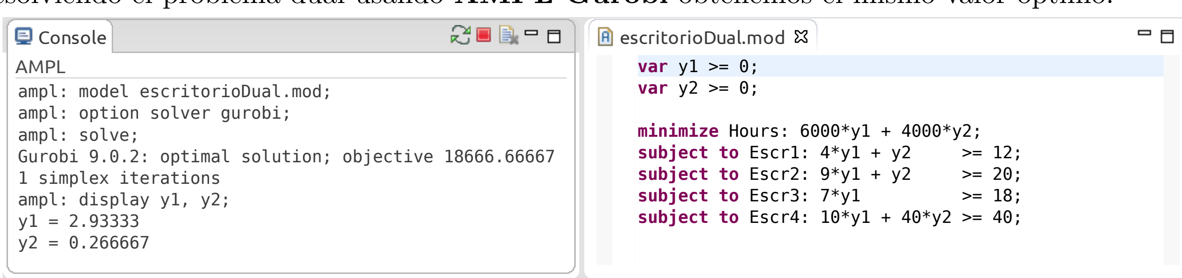
Resolvemos este problema usando el software **AMPL-Gurobi**. Este se puede descargar gratis (solamente por un periodo de prueba) en `https://www.gurobi.com/` y `https://ampl.com/`.



Hemos visto que el dual del dual es el primal. Por lo tanto, podemos usar la Definición 3.1 al revés y el problema dual es:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 6000y_1 + 4000y_2 \\ \text{sujeto a} & \quad 4y_1 + y_2 \geq 12 \\ & \quad 9y_1 + y_2 \geq 20 \\ & \quad 7y_1 \qquad \geq 18 \\ & 10y_1 + 40y_2 \geq 40 \\ & \qquad y_1, y_2 \geq 0\,. \end{array}$$

Resolviendo el problema dual usando **AMPL-Gurobi** obtenemos el mismo valor óptimo:



Nota. Observe que a diferencia de MatLab en el programa hay flexibilidad al definir las restricciones (se permite $\leq$ y $\geq$) y que en las restricciones no es necesario poner `0*x3` (o `0*y2`).

2. Propiedades de problemas duales de P.L.

En el Teorema 3.1 ya vimos una propiedad importante de dualidad: el dual del dual es el primal.

Todos los resultados en esta sección se muestran para el problema estándar y su dual, ver el Lema 3.2 . Llamáremos *primal* y *dual* a los siguientes problemas:

$$Primal = \begin{bmatrix} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad Dual = \begin{bmatrix} \text{maximizar} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{bmatrix}.$$

A continuación demostraremos tres resultados que nos permitirán clasificar los problemas de P.L.

LEMA 3.3 (Dualidad débil). *Sean* $\boldsymbol{x} \in C_F(Primal)$, $\boldsymbol{y} \in C_F(Dual)$. *Entonces,* $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ como en la hipótesis. Usando $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ y la restricción del problema dual deducimos que

$$\boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}.$$

Ahora, dado que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ obtenemos el resultado $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$. □

LEMA 3.4 (Dualidad fuerte). *Sean* $\boldsymbol{x}^\star \in C_F(Primal)$, $\boldsymbol{y}^\star \in C_F(Dual)$ *tales que* $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^\star$. *Entonces,* $\boldsymbol{x}^\star$ *y* $\boldsymbol{y}^\star$ *son soluciones óptimas del problema primal y dual, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\boldsymbol{x} \in C_F(Primal)$ arbitrario. Por dualidad débil tenemos que $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^\star \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ y por hipótesis que $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^\star$. De esto se sigue que

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \qquad \text{para todo} \qquad \boldsymbol{x} \in C_F(Primal)\,,$$

es decir $\boldsymbol{x}^\star$ es solución óptima del problema primal. El mismo argumento funciona para el dual. □

EJERCICIO 3.2. Demuestre que $\boldsymbol{y}^\star$ del Lema 3.4 es solución óptima del dual.

LEMA 3.5. *Sea* $\boldsymbol{x}^\star = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{0})$ *una SBF óptima del problema primal* (Pa), *entonces* $\boldsymbol{\lambda}^\top := \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}$ *es solución óptima del dual* (Da) *y* $\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star$.

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis implica que $A = (A_B|A_N)$, $\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ y el ahorro relativo no es positivo, es decir

$$\boldsymbol{r}_N^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} A_N - \boldsymbol{c}_N^\top \leq \boldsymbol{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} A_N \leq \boldsymbol{c}_N^\top.$$

Definimos $\boldsymbol{\lambda}^\top := \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}$ y mostramos que es una solución óptima del dual. Primero mostramos que es dual factible. De la última expresión se obtiene $\boldsymbol{\lambda}^\top A_N \leq \boldsymbol{c}_N^\top$. Por otro lado

$$\boldsymbol{\lambda}^\top A = \boldsymbol{\lambda}^\top [A_B \,|\, A_N] = [\boldsymbol{\lambda}^\top A_B \,|\, \boldsymbol{\lambda}^\top A_N] = [\boldsymbol{c}_B^\top \,|\, \boldsymbol{\lambda}^\top A_N] \leq [\boldsymbol{c}_B^\top | \boldsymbol{c}_N^\top] = \boldsymbol{c}^\top,$$

de este modo $\boldsymbol{\lambda}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top$, es decir, $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(\text{Da})$.

Ahora veremos que $\boldsymbol{\lambda}$ es un punto óptimo. Primero, observamos que

$$\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star,$$

es decir, los puntos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ satisfacen los hipótesis de la dualidad fuerte (Lema 3.4) y por lo tanto $\boldsymbol{\lambda}$ es solución óptima. □

TEOREMA 3.6 (Dualidad de programas lineales).
Si el problema primal y su dual están dados por

$$\min\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \qquad s.a. \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad y \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \tag{Pa}$$

y

$$\max\ \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \qquad s.a. \qquad A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}\,, \tag{Da}$$

entonces, exactamente una de los siguientes posibilidades ocurre:

1. *No* (Pa) *ni* (Da) *tiene punto factible.*

2. *Si* (Pa) *no está acotado (inferiormente), entonces* $C_F(Da) = \emptyset$.

3. *Si* (Da) *no está acotado (superiormente), entonces* $C_F(Pa) = \emptyset$.

4. *Si* (Pa) *tiene solución óptima* $\boldsymbol{x}^\star \in C_F(Pa)$, *entonces existe* $\boldsymbol{y}^\star \in C_F(Da)$ *tal que*

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^\star\,, \qquad \textit{es decir, } \text{(Da)} \textit{ tiene solución óptima.}$$

DEMOSTRACIÓN. El enunciado **1** será un ejercicio.

Los enunciados **2** y **3** son consecuencias de la dualidad débil, como veremos a continuación.

Mostramos el enunciado **2** con el siguiente argumento. Asumimos que $C_F(\text{Da}) \neq \emptyset$, entonces existe $\boldsymbol{v} \in C_F(\text{Da})$ y dualidad débil (Lema 3.3) nos daría la cota inferior: $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{v}$, contradiciendo que (Pa) no está acotado.

El enunciado **3** se muestra con argumentos análogos.

Por último mostramos el enunciado **4**. Como existe una solución óptima $\boldsymbol{x}^\star$, sin pérdida de generalidad (por el teorema fundamental de Programación Lineal) $\boldsymbol{x}^\star = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{0})$, es decir, $\boldsymbol{x}^\star$ es una SBF óptima. Entonces, el Lema 3.5 nos proporciona la solución óptima del dual $\boldsymbol{y}^\star = \boldsymbol{\lambda}$ con la propiedad $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^\star$. □

EJERCICIO 3.3. Completar la demostración.

- Construya un ejemplo que satisface la posibilidad **1**.
  Ayuda: Puede empezar con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que no tiene rango completo.
- Demuestre el enunciado **3**.

NOTA. Para el enunciado **4** existen varias demostraciones en la literatura. Después, veremos una prueba esas que usa el Lema de Farkas (en una de sus formas), pero esta no será necesaria para entender lo que sigue.

3. La relación con economía

A veces, las entradas de $\boldsymbol{\lambda}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}$ se llaman *multiplicadores Simplex*. En seguida interpretamos las variables duales $\boldsymbol{\lambda}$ para el caso del problema de dieta. Recordemos que el problema de dieta esta dado por:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & (c_j \quad \text{precio del producto } j) \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} & (\boldsymbol{b} \quad \text{nutrientes requeridos}) \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,. & (A_{:j} \quad \text{nutrientes que contiene el producto } j). \end{array}$$

Además, de la Sección 2.1 sabemos que el precio sombra $z_j = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} A_{:j}$ del producto j cuyos nutrientes se reconstruyen comprando artículos de la base. Por lo tanto, si tomamos un vector canónico $\boldsymbol{e}_i$ (que representa una unidad del nutriente i), entonces

$$\lambda_i = \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} \boldsymbol{e}_i$$

representa el costo sintético (o precio sombra) por unidad del nutriente i.

Por la Definición 3.1 el dual del problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} & \boldsymbol{\lambda}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top\,,\ \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{array} \tag{Ds}$$

Este maximiza el precio sombra de cada nutriente (o del producto artificial $\boldsymbol{b}$ que exactamente cubre las necesidades del cliente), de tal manera que $\boldsymbol{\lambda}^\top A_{:j} \leq c_j$ para todo producto j. Es decir, se podría fabricar un suplemento alimenticio (una tableta) que contiene todos los nutrientes $\boldsymbol{b}$ con precio $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda}$ que conviene al cliente más que cualquier producto en el mercado (desde la perspectiva limitada del modelo).

4. Análisis de sensibilidad

Para el desarollo de está sección nos basamos en el libro Bazaraa et al. [2011], capítulo 6 y 7. En análisis de sensibilidad, tratamos de ver como cambios en datos $(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ afectan a una SBF óptima conocida. Consideramos nuestro problema estándar

$$\text{(Pa)} \begin{bmatrix} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \text{con dual} \qquad \begin{bmatrix} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.a.} & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \text{(Da)}\,.$$

Además, sea $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{0})$ con $\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ una SBF óptima de (Pa). Entonces, por el Lema 3.5 $\boldsymbol{\lambda}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}$ es solución óptima del dual. Eso equivale a conocer un *tableau* óptimo (con $\boldsymbol{r}_N \leq \boldsymbol{0}$), es decir,

base	z	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	LD
$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{0}$	I	H	$\boldsymbol{h}$
	1	$\boldsymbol{0}^\top$	$\boldsymbol{r}_N^\top$	$\alpha_\star$

Situación 1. Empezamos analizando el efecto de cambios del vector $\boldsymbol{c}$ de costos.

Supongamos que en el problema de dieta, el proveedor B (de un producto básico) quiere aumentar su precio. ¿Cuánto puede incrementar el precio sin que al cliente le convenga comprar otro producto? Alternativamente, el proveedor N (de un producto NO básico) esta interesado ver cuanto tiene que bajar su precio con el fin de que un cliente lo compre. Matemáticamente, las preguntas de los proveedores B y N se plantean como sigue:

- B: ¿Cuánto puede incrementar su precio sin cambiar la SBF óptima?
- N: ¿Cuánto tiene que reducir su precio tal que su producto entre a la SBF óptima?

Contestamos las dos preguntas con los ahorros relativos y los datos en el *tableau.* Recordamos que:

$$\boldsymbol{r}_N^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} A_N - \boldsymbol{c}_N^\top = \boldsymbol{c}_B^\top H - \boldsymbol{c}_N^\top$$

Respondemos la pregunta del proveedor B. Cambiamos un costo (de un producto) básico, es decir, existe $j \in B$ tal que el nuevo costo es $\tilde{\boldsymbol{c}}_B \coloneqq \boldsymbol{c}_B + \delta \boldsymbol{e}_{jB}$ donde $\boldsymbol{e}_{jB}$ es un vector canónico restringido a los índices básicos. En este caso los nuevos ahorros relativos son

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_N^\top = \tilde{\boldsymbol{c}}_B^\top H - \boldsymbol{c}_N^\top = (\boldsymbol{c}_B + \delta \boldsymbol{e}_{jB})^\top H - \boldsymbol{c}_N^\top = \boldsymbol{r}_N^\top + \delta \boldsymbol{e}_{jB}^\top H\,.$$

Es decir, sumamos una fila de H a los ahorros relativos conocidos. Eso es natural, ya que el proveedor B no quiere que ningún producto no básico se haga más económico que el suyo.

Respondemos la pregunta del proveedor N. Reducimos un costo no básico, es decir, podemos pensar que queremos hacer entrar una variable $e \in N$. El nuevo costo es $\tilde{\boldsymbol{c}}_N \coloneqq \boldsymbol{c}_N - \delta \boldsymbol{e}_{eN}$ donde $\boldsymbol{e}_{eN}$ es un vector canónico restringido a los índices no básicos. En este caso los nuevos ahorros relativos son

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_N^\top = \boldsymbol{c}_B^\top H - \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top = \boldsymbol{c}_B^\top H - \boldsymbol{c}_N^\top + \delta \boldsymbol{e}_{eN}^\top = \boldsymbol{r}_N^\top + \delta \boldsymbol{e}_{eN}^\top\,.$$

En este caso, solo cambia un ahorro relativo, *i.e.*, $\tilde{r}_e = r_e + \delta$.

A continuación ejemplificamos estos argumentos.

Ejemplo 3.4. Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{bmatrix} \text{minimizar} & 50x_1 + 40x_2 \\ \text{sujeto a} & \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \geq 36 \\ & \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \geq 24 \\ & \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \geq 72 \\ & x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \text{minimizar} & 50x_1 + 40x_2 \\ \text{sujeto a} & \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3 \qquad = 36 \\ & \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \qquad - x_4 \quad = 24 \\ & \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \qquad\quad - x_5 = 72 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{bmatrix}$$

Cuyo *tableau* óptimo es:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
x_1	1	.	-2	2	.	24
x_2	.	1	2	-6	.	74
x_5	.	.	2	-8	1	48
z	0	0	-20	-140	0	4080

Caso 1: Proveedor 1 (básico) aumenta su precio. $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} + \delta \boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{R}^5\,(\delta > 0)$.

Los costos restringidos a la base B son $\tilde{\boldsymbol{c}}_B^\top = (c_1 + \delta,\, c_2,\, c_5) = (50 + \delta,\, 40,\, 0)$.

La base óptima no debe cambiar, es decir, antes y después del cambio es $B = \{1, 2, 5\}$.

Eso requiere que los ahorros relativos (no-básicos) **deben permanecer** ≤ 0.

Los ahorros relativos (no-básicos) antes del cambio son $\boldsymbol{r}_N^\top = (r_3,\, r_4) = (-20,\, -140)$.

Después del cambio tenemos

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_N^\top = \boldsymbol{r}_N^\top + \delta(\boldsymbol{e}_1)_B^\top H = \begin{pmatrix}-20, & -140\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}1, & 0, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-20 - 2\delta, & -140 + 2\delta\end{pmatrix}$$

Entonces, $\tilde{\boldsymbol{r}}_N^\top \leq \mathbf{0}$ si y solo si $-20 \leq 2\delta$ y $2\delta \leq 140$ si y solo si $-10 \leq \delta \leq 70$.

Caso 2: Proveedor N reduce su costo para entrar a la base. $\tilde{c}_e = c_e - \delta$.

La teoría muestra que el nuevo ahorro relativo es $\tilde{r}_e = r_e + \delta$.

Suponga que queremos que x_3 entre a la base, entonces pedimos $\tilde{r}_3 > 0$.

Lo cual equivale a $-20 + \delta > 0$ y por lo tanto $\delta > 20$.

Caso 3: Cambios simultáneos. ¿Cuánto se puede aumentar c_2 y reducir c_4 sin cambiar la base?

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^5 \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\delta} := \delta(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4)$$

Entonces, $\tilde{\boldsymbol{c}}_B^\top = (c_1,\, c_2 + \delta,\, c_5)$, $\tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top = (c_3,\, c_4 - \delta)$ y

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{r}}_N^\top = \tilde{\boldsymbol{c}}_B^\top H - \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top &= (\boldsymbol{c}_B + \boldsymbol{\delta}_B)^\top H - (\boldsymbol{c}_N + \boldsymbol{\delta}_N)^\top \\
&= \boldsymbol{r}_N^\top + \boldsymbol{\delta}_B^\top H - \boldsymbol{\delta}_N^\top \\
&= (-20,\, -140) + (0,\, \delta,\, 0) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} - (0,\, -\delta) \\
&= (-20 + 2\delta,\, -140 - 6\delta + \delta)
\end{aligned}$$

Concluimos que $\tilde{\boldsymbol{r}}_N \leq \mathbf{0} \iff \delta \leq 10$ y $\delta \geq -140/5 = -28$.

↑ día 12

EJEMPLO 3.5. Sea el problema y su *tableau* óptimo dados por:

$$\begin{bmatrix} \text{min} & x_1+x_2-4x_3 \\ \text{sujeto a} & x_1+x_2+2x_3 \leq 9 \\ & x_1+x_2-x_3 \leq 2 \\ & -x_1+x_2+x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$L.D.$
x_1	1	$-1/3$	.	$1/3$	.	$-2/3$	$1/3$
x_5	.	2	.	.	1	1	6
x_3	.	$2/3$	1	$1/3$	.	$1/3$	$13/3$
$-$	0	-4	0	-1	0	-2	-17

En este ejemplo, los índices básicos no estan ordenados. Otra vez, cambiaremos costos simultáneamente. Antes de aumentar costos vemos que la base actual es $B=[1,\,5,\,3]$ y los costos básicos son $\boldsymbol{c}_B=(c_1,\,c_5,\,c_3)$. El orden es importante, ya que las filas de la matriz H están en ese orden. Ahora, suponga que aumentamos los costos c_2, c_3, es decir,

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} + \delta(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$$

ó equivalentemente

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_B^\top = (1,\,0,\,-4+\delta) \quad \text{y} \quad \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top = (c_2+\delta,\,c_4,\,c_6) = (1+\delta,\,0,\,0)\,.$$

¿Para cuáles δ la base óptima no cambia?
Determinamos el intervalo para δ tal que los nuevos ahorros relativos cumplen $\tilde{\boldsymbol{r}}_N^\top \leq \boldsymbol{0}$, ya que así no cambia la base. Por lo tanto, calculamos $\tilde{\boldsymbol{r}}_N$ en función de δ :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{r}}_N^\top &= \tilde{\boldsymbol{c}}_B^\top H - \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \\ &= \boldsymbol{r}_N^\top + (0,\,0,\,\delta)H - (\delta,\,0,\,0) \\ &= \Big(-4,\,-1,\,-2\Big) + \delta\Big(\frac{2}{3},\,\frac{1}{3},\,\frac{1}{3}\Big) - \delta\Big(1,\,0,\,0\Big) \\ &= \Big(-4-\delta\frac{1}{3},\,-1+\delta\frac{1}{3},\,-2+\delta\frac{1}{3}\Big) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_N \leq \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \delta \geq -12 \\ \delta \leq 3 \\ \delta \leq 6 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad -12 \leq \delta \leq 3\,.$$

NOTA. Si el cambio causa que alguna(s) entrada(s) de $\widetilde{\boldsymbol{r}}_N$ se hace(n) positiva, entonces se aplica Simplex Fase II, ya que la base sigue siendo factible pero ya no óptima.

NOTA 3.7. El análisis anterior también se aplica, cuando por ejemplo incluimos un nuevo producto con costo c_{n+1} y la columna $A_{:n+1}$ a un problema. Pero, para incluir la columna $H_{:nueva}$ en el *tableau* se debe resolver el sistema $A_B H_{:nueva} = A_{:n+1}$ y calcular el ahorro relativo del nuevo producto $r_{nuevo} = \boldsymbol{c}_B^\top H_{:nueva} - c_{n+1}$.

EJEMPLO 3.6 (nueva columna). Consideramos el problema y su *tableau* óptimo

$$\begin{bmatrix} \text{minimizar} & -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \qquad \leq 4 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{bmatrix}$$

y

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10
z	0	−3	−1	−2	0	−12

Introducimos un nuevo producto con $x_6 \geq 0$, $c_6 = 1$ y $A_{:6} = \binom{-1}{2}$.

¿La SBF $\boldsymbol{x}_B$ sigue siendo óptima?

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies H_{:6} = A_B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_6 = \boldsymbol{c}_B^\top H_{:6} - c_6 = (-2\ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = 1$$

Concluimos que el nuevo producto permite ahorrar y la nueva tabla no es óptima. $\therefore$ la construimos para seguir con Fase II.

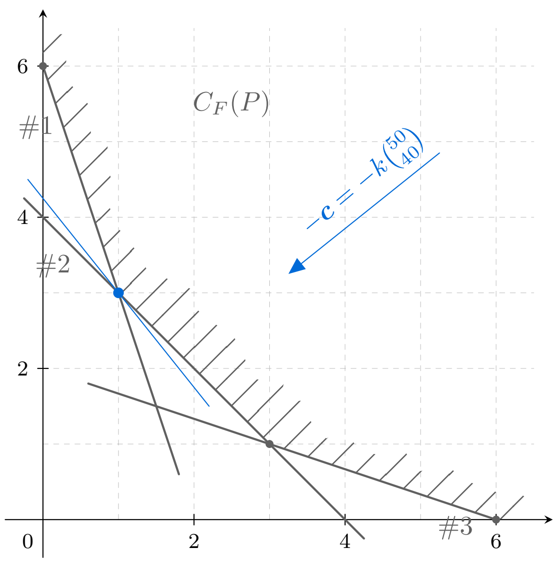
base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	L.D.
x_1	1	1	1	1	0	−1	6
x_5	0	3	1	1	1	1	10
z	0	−3	−1	−2	0	1	−12

4.1. Sensibilidad gráficamente.

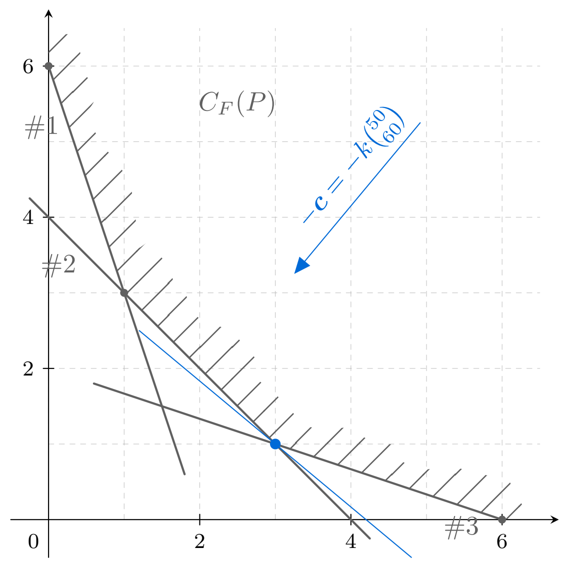
EJEMPLO 3.7. Considere el siguiente problema y

$$\left[\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 50x_1 + 40x_2 \\ \text{sujeto a} & 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1\,,\; x_2 \geq 0 \end{array}\right]$$

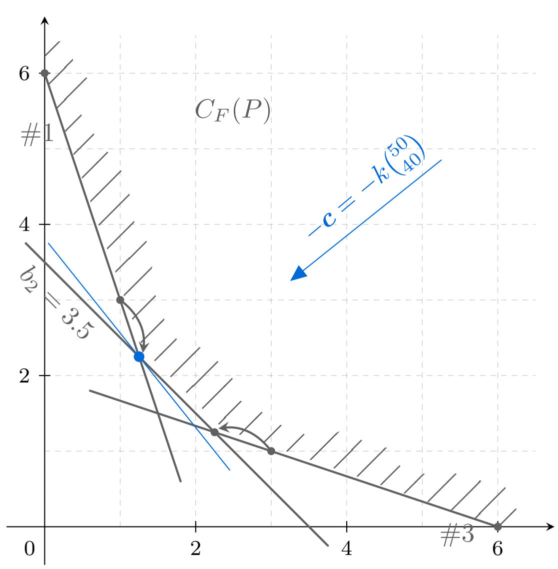
- resuelvalo gráficamente.
- incremente el costo c_2 tal que la SBF óptima cambie.
- cambie el lado derecho y vea como cambia el conjunto factible.



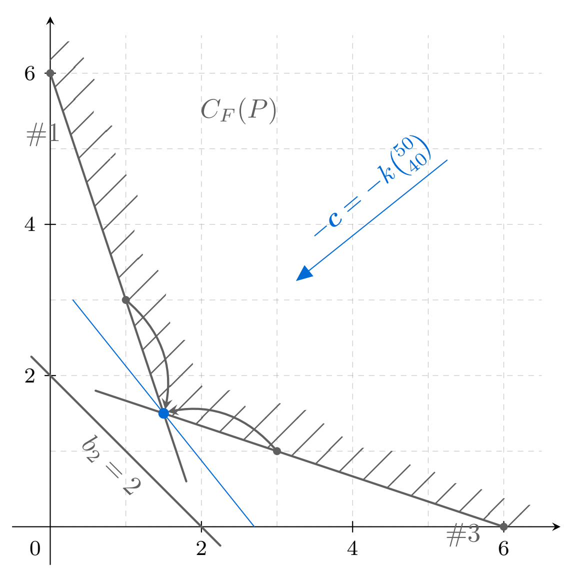
SBF óptima: (x_1, x_2, x_5)



$\boldsymbol{c}$ cambió **mucho**,
nueva SBF óptima: (x_1, x_2, x_3)



$\boldsymbol{b}$ cambió poco,
misma SBF óptima: (x_1, x_2, x_5)



$\boldsymbol{b}$ cambió **mucho**,
nueva SBF óptima: (x_1, x_2, x_4)

4.2. Situación 2. El vector $\boldsymbol{b}$ (lado derecho) cambia.

En el Ejemplo 3.7 vimos geométricamente que cambios en $\boldsymbol{b}$ afectan el conjunto factible, y pueden llegar a cambiar la SBF, es decir, la SBF anterior sale del conjunto factible. Aquí, veremos la teoría al hacer cambios en $\boldsymbol{b}$.

4.2.1. El caso donde no cambia la base. En este caso supongamos que el cambio $\boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{d}$, NO cambia la base óptima. Es decir, la nueva SBF usa el mismo conjunto B y es

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\widetilde{\boldsymbol{x}}_B, \boldsymbol{0}) \quad \text{con} \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}_B = A_B^{-1}(\boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{x}_B + \beta A_B^{-1} \boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}\,.$$

Comentarios.

- Si $\boldsymbol{x}_B > \boldsymbol{0}$ (no degenerado) y β es pequeño, entonces esto será cierto.
- El vector $\widetilde{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{x}_B + \beta \boldsymbol{v}$ se puede calcular si conocemos A_B^{-1} o si resolvemos el sistema $A_B \boldsymbol{v} = \boldsymbol{d}$.
- A veces uno estará interesado en intervalos para β y cambios $\beta \boldsymbol{e}_i$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Observaciones. (solo validas si la base no cambia).

- Si la solución óptima del dual $\boldsymbol{\lambda}$ es conocida, entonces el cambio del valor objetivo esta dado inmediatamente por:
$$\boldsymbol{\lambda}^\top(\boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}_B^\top \widetilde{\boldsymbol{x}}_B\,.$$
- De lo anterior se deduce otra interpretación de las entradas λ_i cuando $\boldsymbol{\lambda}$ es solución óptima del dual. La entrada λ_i nos dice (sin tener que resolver el nuevo problema) con que costo **marginal** la entrada $\beta \boldsymbol{d}_i$ afecta el valor óptimo. Esto es **relativo** a la SBF óptima y solo válido si no se cambia la base. De esta manera, λ_i es considerado como el precio marginal (ó precio sombra) de la componente b_i.
- **Otra interpretación en economía:**
Una compañía usa $x_1, \ldots, x_n$ actividades para producir $b_1, \ldots, b_m$ salidas y minimiza sus costos de producción. Las λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ son precios marginales de las salidas y muestran directamente como un cambio en la salida $\#i$ afecta el costo de la producción.

Algo útil. Suponga que conocemos una base de columnas A_B de A y $A = (\tilde{A}|I) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y los costos son $\boldsymbol{c}^\top = (\tilde{\boldsymbol{c}}^\top|\boldsymbol{0}^\top)$ con $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^m$. Entonces, tomando $\boldsymbol{\lambda}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff A_B^{-1}\big(\tilde{A}\,|\,I\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} \iff \big(A_B^{-1}\tilde{A}\,|\,A_B^{-1}\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^\top A - \boldsymbol{c}^\top = \boldsymbol{\lambda}^\top\big(\tilde{A}\,|\,I\big) - \big(\tilde{\boldsymbol{c}}^\top|\boldsymbol{0}^\top\big) = \big[\boldsymbol{\lambda}^\top\tilde{A} - \tilde{\boldsymbol{c}}^\top\,|\,\boldsymbol{\lambda}^\top\big]$$

Comparamos con los ahorros relativos (extendidos a todos los elementos):

$$\boldsymbol{\lambda}^\top A - \boldsymbol{c}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}(A_B\,|\,A_N) - (\boldsymbol{c}_B^\top\,|\,\boldsymbol{c}_N^\top) = (\boldsymbol{c}_B^\top\,|\,\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}A_N) - (\boldsymbol{c}_B^\top\,|\,\boldsymbol{c}_N^\top) = \big[\boldsymbol{0}^\top\,|\,\boldsymbol{r}_N^\top\big]\,.$$

Concluimos que (en este caso) $\boldsymbol{\lambda}$ y A_B^{-1} se encuentran en el *tableau*.

Ejemplo 3.8. Sea el problema y su *tableau* óptimo dados por:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{min} & x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0\,. \end{array}\right] \quad \text{y}$$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$L.D.$
x_1	1	$-1/3$	.	$1/3$	.	$-2/3$	$1/3$
x_5	.	2	.	.	1	1	6
x_3	.	$2/3$	1	$1/3$	.	$1/3$	$13/3$
$-$	0	-4	0	-1	0	-2	-17

Haremos un cambio al lado derecho:

Por el *tableau* óptimo sabemos que la base óptima es $B = [1, 5, 3]$ (similar a un ejemplo anterior). Además, se puede leer la inversa de A_B :

$$A_B = [A_{:1},\, A_{:5},\, A_{:3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Sea el cambio

$$\boldsymbol{d} := \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces la nueva solución básica es

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}_B &= \boldsymbol{x}_B + A_B^{-1}\boldsymbol{d} \\ &= \begin{bmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ -1/3 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \beta \le 1 \\ \beta \ge -6 \\ \beta \le 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Concluimos, que mientras $-6 \le \beta \le 1$ la misma base da una SBF óptima.

Además, como $\boldsymbol{c}_B^\top = (c_1,\, c_5,\, c_3) = (1,\, 0,\, -4)$ tenemos $\boldsymbol{\lambda}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} = (-1,\, 0,\, -2)$ y el nuevo valor óptimo es $\boldsymbol{\lambda}^\top(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}) = -17 + \beta$.

Ejemplo 3.9. Dada la tabla óptima del Ejemplo 3.6 , si cambiamos $\boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{d}$, con $\boldsymbol{d} = \binom{1}{-2}$. ¿Qué condiciones se le tienen que imponer a β, para que $\boldsymbol{x}_B$ se mantenga factible?

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{x}}_B = A_B^{-1}(\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{d}) &= \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ge \boldsymbol{0} \iff -6 \le \beta \le 10\,. \end{aligned}$$

↑ día 13

4.2.2. El caso cuando cambiar el lado derecho cambia la base. Aquí motivamos el siguiente método. Consideramos un cambio $\boldsymbol{b} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{b}} := \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$ con un vector $\boldsymbol{d}$ fijo que hace la base actual no factible. Es decir, después del cambio existe i tal que $(\widetilde{\boldsymbol{x}}_B)_i < 0$.

¿Tenemos que resolver todo de nuevo?
La respuesta es "NO", y para evitar la Fase I veremos el algoritmo Simplex DUAL.

Pensamos en nuestro problema primal original (P) al cuál le asociamos un nuevo problema primal $(\widetilde{P})$, es decir

$$(P)\begin{bmatrix} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad (\widetilde{P})\begin{bmatrix} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{b}} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

cuyos duales son

$$(D)\begin{bmatrix} \text{maximizar} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad (\widetilde{D})\begin{bmatrix} \text{maximizar} & \widetilde{\boldsymbol{b}}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

Como el problema (P) tiene solución óptima $\boldsymbol{x}_\star$, sabemos que

$$\exists \boldsymbol{y}_\star \colon A^\top \boldsymbol{y}_\star \leq \boldsymbol{c} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}_\star = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_\star \,.$$

Observe que el conjunto factible de (D) y de $(\widetilde{D})$ es el mismo, es decir, $C_F(D) = C_F(\widetilde{D})$, de donde se sigue que $\boldsymbol{y}_\star \in C_F(\widetilde{D})$. Por lo tanto, quedan dos opciones para el problema $(\widetilde{P})$:

1. El problema $(\widetilde{P})$ tiene solución óptima.

2. El problema $(\widetilde{P})$ tiene un conjunto factible vacío.

¿Cómo llegar a las dos opciones anteriores?

Se busca maximizar el dual $(\widetilde{D})$ y con ello llegamos a una solución óptima del dual. Lo ideal sería reconstruir una SBF óptima del primal $(\widetilde{P})$, lo cual se hace con el Método Simplex-Dual, que veremos en la siguiente sección.

5. El algoritmo Simplex Dual

El objetivo es describir al algoritmo para nuestro problema estándar y su dual:

$$(Pa)\left[\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right] \qquad \text{con dual} \qquad \left[\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \end{array}\right](Da)$$

A continuación veremos una condición necesaria y suficiente que caracteriza las soluciones óptimas. Después, veremos un ejemplo geométrico que muestra como se puede usar esa condición que motivará al algoritmo.

5.1. Holgura complementaria (complementary slackness).

Teorema 3.8 (complementaridad asimétrica). *Sean* $\boldsymbol{x} \in C_F(Pa)$ *y* $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(Da)$, *entonces* $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *son soluciones óptimas si y solo si para* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *se cumplen:*

a) $x_j > 0 \implies c_j = \boldsymbol{\lambda}^\top A_{:j}$

b) $x_j = 0 \impliedby \boldsymbol{\lambda}^\top A_{:j} < c_j$.

Demostración. Suponga que se cumplen $a)$ y $b)$, entonces

$$\left(\boldsymbol{\lambda}^\top A - \boldsymbol{c}^\top\right)\boldsymbol{x} = 0 \quad \overset{\boldsymbol{x} \in C_F}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}\,.$$

De lo anterior y aplicando dualidad fuerte se obtiene que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ son soluciones óptimas.

Ahora, suponga que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ son soluciones óptimas, entonces por el Teorema 3.6 se tiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{b} \overset{\boldsymbol{x} \in C_F}{\Longleftrightarrow} & \; \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top A\boldsymbol{x} = 0 \\ \Longleftrightarrow & \; \underbrace{\left(\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}^\top A\right)}_{\geq \boldsymbol{0},\, \boldsymbol{\lambda} \in C_F(Da)} \; \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\substack{\geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \in C_F(Pa)}} = 0\,. \end{aligned}$$

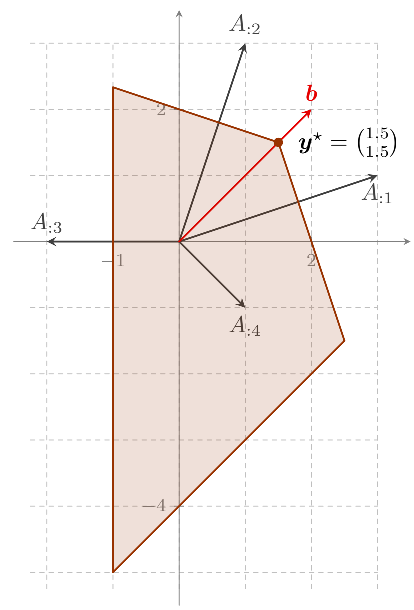
La última ecuación se cumple si y solo si las condiciones $a)$ y $b)$ se satisfacen. $\square$

5.2. Holgura complementaria geométricamente. El Teorema 3.8 permite decir cuales columnas de la matriz A no son usadas en la SBF óptima (combinación lineal no-negativa de $\boldsymbol{b}$). Daremos un ejemplo.

Consideramos el siguiente problema y su dual

$$(P)\quad \left[\begin{array}{ll} \min & 6x_2 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a} & 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ & \quad x_1 + 3x_2 \qquad\;\; - x_4 = 2 \\ & \qquad\qquad\quad x_1, \ldots, x_4 \geq 0 \end{array}\right] \qquad \text{y} \qquad \left[\begin{array}{ll} \max & 2y_1 + 2y_2 \\ \text{s.a} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}\right] \quad (D)$$

El dibujo muestra el conjunto factible del dual.



- Cada columna $A_{:j}$ de A define una restricción en el dual cuya frontera es ortogonal a $A_{:j}$.
- En este ejemplo $m = 2:$ Si $\boldsymbol{b}$ es un múltiplo positivo de una columna de A, entonces el dual (y el primal) tiene muchas soluciones, ya que en este caso $\boldsymbol{b}$ es ortogonal a una frontera.
- En este caso $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal positiva de $\{A_{:1}, A_{:2}\}$ y la solución dual es $(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Luego, por el Teorema 3.8 sabemos que $(x_3, x_4) = (0, 0)$, ya que las restricciones $A_{:3}$, $A_{:4}$ no son activas, es decir, $\boldsymbol{\lambda}^\top A_{:3} < 2$ y $\boldsymbol{\lambda}^\top A_{:4} < 4$. Por lo tanto concluimos que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es SBF óptima de (P).

5.3. El algoritmo Simplex Dual. En esta sección describiremos al algoritmo para el problema primal (Pa) y su dual (Da). Para tenerlos presentes los recordamos nuevamente:

$$(P)\begin{bmatrix} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \text{con dual} \qquad \begin{bmatrix} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \end{bmatrix}(D)$$

El algoritmo dual construye (de manera implícita) una sucesión $\{\boldsymbol{\lambda}_i\}_i \subset C_F(D)$. Para eso, supone que conocemos una base de columnas de A, digamos $\{A_{:j}\}_{j\in B}$ tal que $\boldsymbol{\lambda}_0^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} \in C_F\,(D)$. Esto, equivale a conocer un *tableau*

base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	L.D.
$\boldsymbol{x}_B$	I	H	$\boldsymbol{h}$
z	$\boldsymbol{0}^\top$	$\boldsymbol{r}_N^\top$	$\alpha_0 = \boldsymbol{\lambda}_0^\top \boldsymbol{b}$

con $\boldsymbol{r}_N \leq \boldsymbol{0}$, puesto que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_0 \in C_F(D) \iff \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j} \leq c_j \quad \text{para} \quad j \in \{1, \ldots, n\} \\ \implies \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_N - \boldsymbol{c}_N^\top \leq \boldsymbol{0}^\top \iff \boldsymbol{r}_N^\top \leq \boldsymbol{0}^\top. \end{aligned}$$

Definición 3.3. Decimos que un *tableau* con $\boldsymbol{r}_N \leq \boldsymbol{0}$ es *dual factible*.

Nota 3.9. El algoritmo genera en cada paso un *tableau* dual factible. El vector $\boldsymbol{h}$ debe tener entradas negativas. Si $\boldsymbol{h} \geq \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{\lambda}$ son soluciones óptimas. (Este enunciado se dejará como ejercicio.)

Algoritmo: Un paso de Simplex dual (Fase II)

1. ¿Cuál variable (básica) x_s $(s \in B)$ sale de la base?
→ escoger un índice $s \in B$ tal que $x_s = h_{\tilde{s}} < 0$.
Si no existe tal s, entonces $\boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}$ y se ha encontrado una solución óptima (STOP).

2. Dado $s \in B$. ¿Cuál variable (no-básica) x_e $(e \in N)$ entra?
→ encontrar un índice $e \in N$ tal que $r_e/H_{\tilde{s}e} = \min_{j\in N}\{r_j/H_{\tilde{s}j} \colon H_{\tilde{s}j} < 0\}$.
Si $H_{\tilde{s}:} \geq \boldsymbol{0}$, entonces el problema dual no esta acotado, $\therefore C_F(P) = \emptyset$ (STOP).

3. cambiar x_s por x_e (y regresar a punto 1), con

$$B = B \setminus \{s\} \cup \{e\}\,, \qquad N = N \setminus \{e\} \cup \{s\}\,.$$

Antes de dar las justificaciones y la construcción del algoritmo, consideramos importante dar un ejemplo. Aunque después de ver el ejemplo arriesgamos que el estudiante ya no este interesado en ver las justificaciones del porque se construye así el algoritmo. Las justificaciones son importantes ya que parte de la formación de un matemático (aplicado) es justificar la construcción de algoritmos.

EJEMPLO 3.10. Sea el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Al multiplicar las restricciones por (-1) e introducir variables de holgura llegamos a

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad = -3 \\ & -2x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad + x_5 = -4 \\ & x_1,\, \dots,\, x_5 \geq 0\,. \end{aligned}$$

De este modo llegamos a la tabla inicial. En este caso $\boldsymbol{r}_N = -\boldsymbol{c}_N$ puesto que $\boldsymbol{c}_B = (0,\, 0)^\top$:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
x_4	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	-2	1	-3	.	1	-4
ahorro	-2	-3	-4	0	0	0

Esta tabla es dual factible, ya que $\boldsymbol{r}_N \leq \mathbf{0} \iff \boldsymbol{\lambda}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top$.
En general, si $\boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \in C_F(Da)$.

Se tiene que decidir cuál variable sale.

$\rightarrow$ escoger un índice $s \in B$ tal que $x_s < 0$. Digamos que x_5 sale, ahora quien entra?

$\rightarrow$ encontrar un índice $e \in N$ tal que $r_e/H_{\tilde{s}e} = \min_{j\in N}\{r_j/H_{\tilde{s}j} \colon H_{\tilde{s}j} < 0\} = \min\left\{\frac{-2}{-2},\, \frac{-4}{-3}\right\}$.

Lo anterior implica que la variable x_1 es candidata a entrar:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
x_4	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	$\mathbf{-2}$	1	-3	.	1	-4
ahorro	-2	-3	-4	0	0	0

El cambio $x_5 \leftrightarrow x_1$ da:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
x_4	0	$\mathbf{-5/2}$	$1/2$	1	$-1/2$	-1
x_1	**1**	$-1/2$	$3/2$	0	$-1/2$	2
ahorro	0	-4	-1	0	-1	4

En la tabla anterior x_4 sale, ya que es la única variable básica negativa.

¿Quién entra? $\rightarrow$ encontrar un índice $e \in N$ tal que $r_e/H_{\tilde{s}e} = \min_{j\in N}\{r_j/H_{\tilde{s}j} \colon H_{\tilde{s}j} < 0\} = \min\left\{\frac{-4}{-5/2},\, \frac{-1}{-1/2}\right\}$ lo anterior implica que la variable x_3 es candidata a entrar, y de este modo obtenemos la siguiente tabla

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L.D.
x_4	0	**1**	$-1/5$	$-2/5$	$1/5$	$2/5$
x_1	**1**	0	$7/5$	$-1/5$	$-2/5$	$11/5$
ahorro	0	0	$-9/5$	$-8/5$	$-1/5$	$28/5$

La tabla anterior es primal factible, ya que $\boldsymbol{h} \geq \mathbf{0}$; y es dual factible pues $\boldsymbol{r}_N \leq \mathbf{0}$. Por lo tanto la solución óptima primal es

$$x_1 = \frac{11}{5}\,,\ x_2 = \frac{2}{5}\,,\ x_3 = 0.$$

Por el argumento visto en página 95, la solución óptima dual es

$$\lambda_1^\star = -\frac{8}{5}\,,\ \lambda_2^\star = -\frac{1}{5}.$$

Ejercicio 3.4. Dado el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeto a} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. \end{array}$$

Ocupe el algoritmo Dual-Simplex Fase II, para demostrar que su solución óptima primal es:

$$x_1 = 1\,,\ x_2 = 2\,,\ x_3 = 0.$$

↑ día 14

5.4. Justificaciones y construcción del algoritmo. El método construye una sucesión implícita $\{\boldsymbol{\lambda}_i\}_{i\in\{0,1,\dots\}} \subset C_F(D)$ tal que $\boldsymbol{\lambda}_i^\top \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{\lambda}_{i-1}^\top \boldsymbol{b}$. Esta sucesión se detiene en una solución óptima (cuando $\boldsymbol{h} \geq \boldsymbol{0}$) o detecta que el problema dual no es acotado, lo cual implica $C_F(Pa) = \emptyset$.

Recuerde que el algoritmo es para los problemas

$$(P)\begin{bmatrix} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \text{con dual} \qquad \begin{bmatrix} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \end{bmatrix}(D)$$

Además, que $\boldsymbol{\lambda}_0^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}$ es punto dual factible que es distinto de la solución óptima (al principio). El siguiente Teorema muestra propiedades de la sucesión $\{\boldsymbol{\lambda}_i\}_i$ y justifica el algoritmo.

Teorema 3.10. *Las siguientes propiedades justifican el algoritmo Simplex Dual (Fase II).*

a) *Si* $\boldsymbol{h} \geq \boldsymbol{0}$, *entonces* $\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{\lambda}$ *son soluciones óptimas.*

b) *La sucesión* $\{\boldsymbol{\lambda}_i\}$ *es dual factible, es decir,* $\boldsymbol{\lambda}_i \in C_F(D)$.

c) *El valor objetivo crece, es decir,* $\alpha_i := \boldsymbol{\lambda}_i^\top \boldsymbol{b} \geq \alpha_{i-1} := \boldsymbol{\lambda}_{i-1}^\top \boldsymbol{b}$.

d) *Si* $H_{\tilde{s}:} \geq \boldsymbol{0}$, *entonces* $\alpha_i \to \infty$ *y el problema dual no esta acotado.*

Demostración. La prueba del inciso $a)$ es una consecuencia de dualidad fuerte, dicha prueba se deja de tarea.

Para demostrar $b)$ es suficiente mostrar que $\boldsymbol{\lambda}_0 \in C_F(D) \implies \boldsymbol{\lambda}_1 \in C_F(D)$. El criterio de la variable de entrada asegura esta propiedad. A continuación construimos este criterio.
Empezamos en $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_0 - \epsilon\boldsymbol{\delta}$ y evaluamos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_1^\top A &= \boldsymbol{\lambda}_0^\top A - \epsilon\boldsymbol{\delta}^\top A \\ &= \boldsymbol{\lambda}_0^\top (A_B \,|\, A_N) - \epsilon\boldsymbol{\delta}^\top (A_B \,|\, A_N) \\ &= \left(\boldsymbol{\lambda}_0^\top A_B \,|\, \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_N\right) - \epsilon\left(\boldsymbol{\delta}^\top A_B \,|\, \boldsymbol{\delta}^\top A_N\right) \\ &= \left(\boldsymbol{c}_B^\top \,|\, \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_N\right) - \epsilon\left(\boldsymbol{\delta}^\top A_B \,|\, \boldsymbol{\delta}^\top A_N\right) \end{aligned}$$

Queremos mantener $r_j = 0$ para $j \in B \setminus \{s\}$. Por lo tanto, pedimos

$$\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:j} = \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j} = c_j \qquad \text{para } j \in B \setminus \{s\} \tag{$*_a$}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:s} < c_s\,. \tag{$*_b$}$$

Considerando que $A_{:s}$ esta en la columna $\tilde{s}$ de A_B y la entrada $\tilde{s}$ de $\boldsymbol{c}_B$ es c_s, las condiciones anteriores equivalen a

$$\boldsymbol{\delta}^\top A_B = \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}^\top \iff \boldsymbol{\delta}^\top = \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}^\top A_B^{-1}.$$

Falta asegurar que:

$$\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:j} \leq c_j \qquad \text{para } j \in N \setminus \{e\} \qquad \text{(Asegura que } \lambda_1 \text{ es dual factible)}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:e} = c_e \tag{$\#_a$}$$

> *Motivación:* Si fuera λ_1 óptima, las condiciones $(*_a)$ y $(\#_a)$ son necesarias y $(*_b)$ implicaría $x_s = 0$, debido al teorema de la *complementaridad asimétrica*. Además, con $(*_a)$ y $(\#_a)$ aseguramos $\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{\tilde{B}} = \boldsymbol{c}_{\tilde{B}}^\top \iff \boldsymbol{\lambda}_1^\top = \boldsymbol{c}_{\tilde{B}}^\top A_{\tilde{B}}^{-1}$ donde $\tilde{B} = B \setminus \{s\} \cup \{e\}$ es la nueva base.

Con el fin de asegurar que $\lambda_1 \in C_F(D)$, determinamos el parámetro ϵ :

$$\begin{aligned}
& c_j \geq \boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:j} = \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j} - \epsilon\, \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}{}^\top A_B^{-1} A_{:j} && (j \in N \cup \{s\}) \\
\iff \quad & 0 \geq \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j} - c_j - \epsilon\, \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}{}^\top H_{:j} && (j \in N \cup \{s\}) \\
\iff \quad & 0 \geq r_j - \epsilon H_{\tilde{s}j} && (j \in N \cup \{s\}) \\
\iff \quad & \epsilon H_{\tilde{s}j} \geq r_j && (j \in N \cup \{s\}) \\
\iff \quad & \epsilon \leq \frac{r_j}{H_{\tilde{s}j}} \ \text{ con } \ H_{\tilde{s}j} < 0 && (j \in N \cup \{s\}).
\end{aligned}$$

Si escogemos ϵ y $e \in N$ tal que $\epsilon = \frac{r_e}{H_{\tilde{s}e}} = \min_{j \in N} \left\{ \frac{r_j}{H_{\tilde{s}j}} : H_{\tilde{s}j} < 0 \right\}$, entonces

$$r_e - \epsilon H_{\tilde{s}e} = 0 \iff \boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:e} = c_e\,.$$

La última expresión satisface la ecuación $(\#_a)$. Por lo tanto, en la nueva base $\widetilde{B} \coloneqq B \setminus \{s\} \cup \{e\}$ y $\widetilde{N} \coloneqq N \setminus \{e\} \cup \{s\}$ se tiene $\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{\widetilde{B}} = \boldsymbol{c}_{\widetilde{B}}^\top$. Además, se tiene que $\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:j} \leq c_j$ para todo $j \in \widetilde{N}$. Por lo tanto, concluimos que $\boldsymbol{\lambda}_1 \in C_F(D)$.

Para mostrar el inciso c), es suficiente mostrar que $\alpha_1 \geq \alpha_0$

$$\alpha_1 = \boldsymbol{\lambda}_1^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda}_0^\top \boldsymbol{b} - \epsilon\, \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{b} = \alpha_0 - \epsilon\, \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}^\top A_B^{-1} \boldsymbol{b} = \alpha_0 - \epsilon\, h_{\tilde{s}} = \alpha_0 - \epsilon\, x_s \geq \alpha_0\,,$$

estrictamente mayor si y solo si $\epsilon > 0 \iff r_e < 0$.

Procedemos a mostrar el inciso d). Si $H_{\tilde{s}j} \geq 0$ para todo $j \in N$, entonces $\epsilon \to \infty$ es permitido. Por lo tanto, $\boldsymbol{\lambda}_1^\top \boldsymbol{b} = \alpha_0 - \epsilon x_s \to \infty$, es decir, el dual no es acotado y $C_F(P) = \emptyset$. □

NOTA. Si en cada paso $r_e < 0$, entonces $\alpha_i > \alpha_{i-1}$ (por c). En este caso tenemos convergencia similar al algoritmo Simplex. Para evitar ciclos (cuando $r_e = 0$), se puede usar la regla de Bland.

Un resumen parcial

En esta sección resumimos lo que hemos visto para motivar el método PRIMAL DUAL. Primero, en Figura 3.1 se explican las "similitudes" entre la Fase II del método Simplex y la del método dual Simplex. Los dos suponen que ya estamos factible en algún sentido.

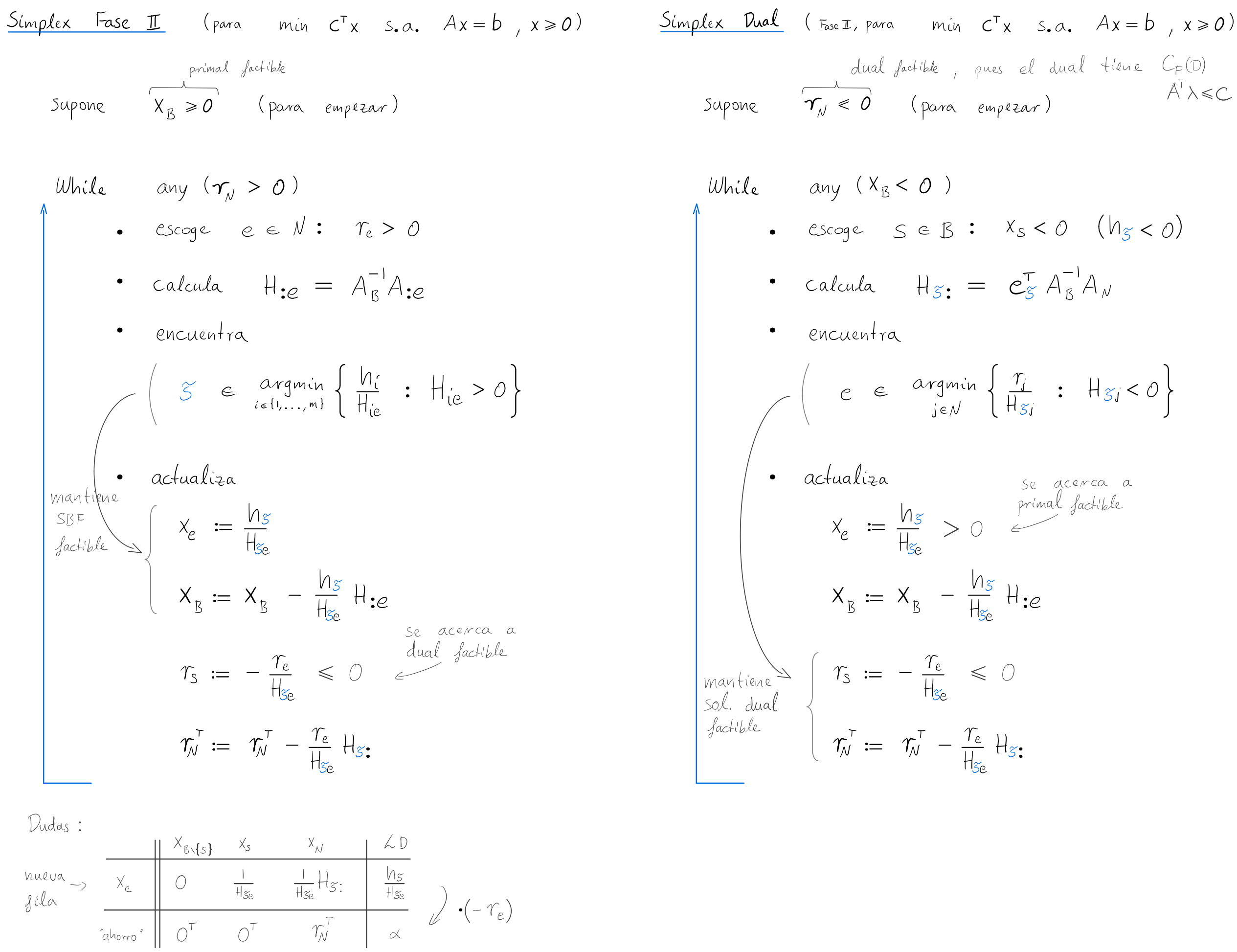


FIGURA 3.1. Simplex Fase II *vs* Simplex Dual (Fase II).

En general, para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, hemos visto métodos para el problema

$$(P)\begin{bmatrix} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \text{y su dual} \qquad \begin{bmatrix} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{y}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \end{bmatrix}(D).$$

EN EL CASO de que conozcamos una submatriz $A_B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertible de A, sabemos una solución básica y un *tableau*:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} &= A_B^{-1}\boldsymbol{b}\,, \quad \alpha = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{h}\,, \\ \boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{h} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N\,, \\ \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{h} - \Big(\underbrace{\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}A_N - \boldsymbol{c}_N^\top}_{\boldsymbol{r}_N}\Big)\boldsymbol{x}_N\,. \end{aligned}$$

base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	L.D.
$\boldsymbol{x}_B$	I	H	$\boldsymbol{h}$
z	$\boldsymbol{0}^\top$	$\boldsymbol{r}_N^\top$	α

Dado tal *tableau* podemos decidir que método aplicamos:

- Si $\boldsymbol{h} \geq 0$, entonces el *tableau* es (primal) factible y seguimos con Fase II (Simplex).
- Si $\boldsymbol{r}_N \leq 0$, entonces el *tableau* es dual factible y aplicamos Simplex Dual (Fase II).
- El "*caso feo*" se da cuando $\exists r_j > 0$ y $\exists h_i < 0$, lo cual implica que la tabla no es factible ni para el primal ni para el dual. En este caso, podriamos usar Fase I o la siguiente idea:
  Se puede cambiar $\boldsymbol{r}_N$ por $\tilde{\boldsymbol{r}}_N \leq \boldsymbol{0}$ y definir el problema auxiliar $(\tilde{P})$ dado por el *tableau*:

base	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	LD
$\boldsymbol{x}_B$	I	H	$\boldsymbol{h}$
z	$\boldsymbol{0}^\top$	$\tilde{\boldsymbol{r}}_N^\top$	α

  Esta idea aumenta los costos no básicos y el conjunto factible no será cambiado, es decir, $C_F(P) = C_F(\tilde{P})$. El *tableau* anterior es dual factible $(C_F(\tilde{D}) \neq \emptyset)$, y nos permite aplicar el método Simplex dual, el cuál nos lleva a una de las dos respuestas siguientes:

  1. El dual "modificado" $(\tilde{D})$ no es acotado, entonces $\emptyset = C_F(\tilde{P}) = C_F\,(P)$.

  2. El dual "modificado" $(\tilde{D})$ tiene solución óptima $\boldsymbol{\lambda}_*$ y $\boldsymbol{x}_B^* \in C_F\,(P)$ que implica que podemos aplicar la Fase II para el problema original. Para eso, similar al cambio de Fase I a Fase II, se tiene que recalcular $\boldsymbol{r}_N$ asociado a $\boldsymbol{x}_B^*$ con los costos del problema original.

Nota. Lo anterior es bonito para problemas originales con conjunto factible $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}$, pues inmediatamente (después de introducir variables de holgura tenemos una $A_B^{-1} = I$.)

Nota. En todo caso, requerimos un conjunto de indices B tal que la matriz A_B^{-1} exista. Una manera de encontrar a B es el algoritmo Primal Dual.

↑ día 15

6. El algoritmo Primal-Dual

Los argumentos en esta sección se basan en los libros de Bazaraa et al. [2011]y Luenberger and Ye [2008]. El *algoritmo Primal-Dual* resuelve simultáneamente el problema primal y dual y fue diseñado para problemas de flujo en redes.

Dato curioso: Algunos de esos problemas buscan soluciones enteras y soluciones a problemas con datos en los enteros $(\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m)$ y matrices $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ son enteras. Esté resultado se verá en Investigación de Operaciones.

Describimos el algoritmo para el problema estándar y su dual:

$$(P) \begin{bmatrix} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{\lambda}^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top \end{bmatrix} (D).$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$.

Funcionamiento: El algoritmo empieza en un $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(D)$ y genera un nuevo elemento en cada paso, digamos $\boldsymbol{\lambda}_+ \in C_F(D)$. Esto se hace como sigue. Dado $\boldsymbol{\lambda}$ se define un *problema restringido* que es similar al problema auxiliar de Fase I pero que no incluye todas las columnas de A (se restringen). La decisión de cual columna incluir o no, se basa en las condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad (véase el Teorema 3.8 de la complementaridad). La solución óptima del dual del problema restringido se usa para definir el nuevo $\boldsymbol{\lambda}_+ \in C_F(D)$. Esto se repite hasta que lleguemos a una solución óptima del (D) y (P) o hasta que se detecte que el dual (D) no es acotado.

¿Cuál es la diferencia entre el método Primal-Dual y el método Simplex Dual?
Vimos que el Simplex Dual requiere una base dual factible. Si una base así es fácil de obtener, entonces el método Simplex Dual es mas rápido y la Fase I no se requiere. El método primal-dual solo requiere $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(D)$ pero no requiere una base (asociada) que sea dual factible. Una base de A_B se encuentra en el proceso.

A continuación se describirá el algoritmo primal-dual, semejante al método dual Simplex, que empieza con factibilidad dual y procede a obtener factibilidad primal, manteniendo holgura complementaría durante todo el proceso.

Algoritmo: Primal-Dual Simplex

Dado $\boldsymbol{\lambda}_0 \in C_F(D)$

1. Se define $J \coloneqq \left\{ j \in \{1, \ldots, n\} : \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j} = c_j \right\}$ y el *problema (aux.) restringido*

$$(P_R) \left[\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ & \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \quad \& \quad x_j = 0 \ \text{ para } \ j \notin J \end{array} \right] .$$

2. Fase II: Obtener una SBF óptima $(\boldsymbol{x}_J^*, \boldsymbol{y}^*)$ y una base $A_{\tilde{B}}$ con columnas de $(A_J | I)$.

3. Si $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{x}_J^*$ es solución óptima del problema (P). ($\rightarrow$ STOP: ver Justificación 1.)

4. En otro caso $(\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* > 0)$, calcular la solución óptima $\boldsymbol{u}_0$ del dual de (P_R), digamos del *dual (aux.) restringido*:

$$(D_R) \left[\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{u} \\ \text{s.a.} & \boldsymbol{u}^\top A_{:j} \leq 0 \quad \text{para} \quad j \in J \\ & \boldsymbol{u}^\top \leq \mathbb{1}^\top \end{array} \right]$$

(Suena complicado pero del Lema 3.5 y del punto **2** sabemos que $\boldsymbol{u}_0^\top = \boldsymbol{c}_{\tilde{B}}^\top A_{\tilde{B}}^{-1}$).
Si $\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} \leq 0$ para $j \in N \coloneqq \{1, \ldots, n\} \backslash J$, entonces $C_F(P) = \emptyset$. ($\rightarrow$ STOP: ver Justificación 2.)

5. En otro caso $\exists j \colon \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0$. Aquí construimos un nuevo $\boldsymbol{\lambda}_1 \in C_F(D)$, es decir, queremos mantener $\boldsymbol{\lambda}_1^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top$. Definimos $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_0 + \epsilon \boldsymbol{u}_0 \in C_F(D)$ (ver Justificación 3.)
donde

$$\epsilon = \frac{-r_e}{\boldsymbol{u}_0^\top A_{:e}} = \min_{j \in N} \left\{ \frac{c_j - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j}}{\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j}} : \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0 \right\} .$$

De aquí el algoritmo se regresa a punto **1** con $\boldsymbol{\lambda}_1$ en lugar de $\boldsymbol{\lambda}_0$.

Figura 3.2 ilustra como funciona el algoritmo Primal-Dual con un diagrama de flujo.

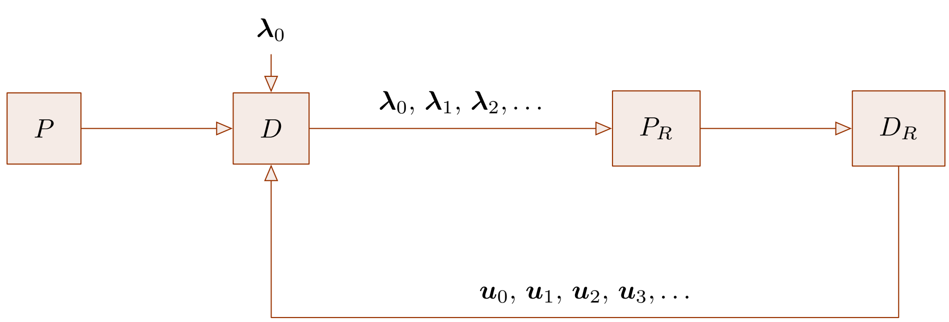


FIGURA 3.2. Funcionamiento del algoritmo Primal-Dual.

6.1. El algoritmo en forma de *tableau*. Recuerde que el algoritmo primal-dual ocupa 4 problemas al mismo tiempo. Nuestro *tableau* asociado representará el primal restringido y un renglón que contendrá $\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}^\top A$ (la factibilidad del dual original). Además, en su versión óptima la parte del primal restringido contiene los productos puntos $\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j}$.

Dado $\boldsymbol{\lambda}_0 \in C_F(D)$ podemos escribir el *tableau*:

	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{x}_J$	$\boldsymbol{y}$	L.D.
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A$	$-\boldsymbol{r}_N > \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\times$	$\times$
$\boldsymbol{y}$	A_N	A_J	I	$\boldsymbol{b}$
z_R	$\mathbb{1}^\top A_N$	$\mathbb{1}^\top A_J$	$\boldsymbol{0}$	$\mathbb{1}^\top \boldsymbol{b}$.

Durante la Fase II (del problema restringido) solo se pueden entrar variables x_j donde $j \in J$. La primera fila no cambia. Después de optimizar, se obtiene

	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{x}_J$	$\boldsymbol{y}$	L.D.
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A$	$-\boldsymbol{r}_N > \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\times$	$\times$
$\boldsymbol{x}_{\widetilde{B}}$	$A_{\widetilde{B}}^{-1} A_N$	$A_{\widetilde{B}}^{-1} A_J$	$A_{\widetilde{B}}^{-1}$	$\boldsymbol{h}_R \geq \boldsymbol{0}$
z_R	$\boldsymbol{c}_{\widetilde{B}}^\top A_{\widetilde{B}}^{-1} A_N$	$\boldsymbol{c}_{\widetilde{B}}^\top A_{\widetilde{B}}^{-1} A_J \leq \boldsymbol{0}$	$\leq \boldsymbol{0}$	$\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$.

En las columnas azules, esta tabla es una óptima para (P_R) y (D_R) ya que $\boldsymbol{h}_R \geq \boldsymbol{0}$ y que los ahorros relativos son $\leq \boldsymbol{0}$ en la tercera y cuarta columna. Note que la última fila de z_R contiene los productos $\boldsymbol{u}_0^\top A_N = \boldsymbol{c}_{\widetilde{B}}^\top A_{\widetilde{B}}^{-1} A_N$ y (con el mismo argumento) $\boldsymbol{u}_0^\top A_J$.

Esta tabla es el resultado del punto **2** del algoritmo y contiene todo lo necesario para tomar las decisiones de los puntos **3, 4, 5**.

- Si $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* = 0$, salimos del punto **3**.
- Si $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* > 0$ y $\boldsymbol{u}_0^\top A_N \leq \boldsymbol{0}$, entonces salimos del punto **4**.
- En otro caso $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* > 0$ y existe $j \in N$ tal que $\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0$. Calculamos

$$\varepsilon := \min_{j \in N} \left\{ \frac{c_j - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j}}{\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j}} : \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0 \right\}$$

  y la nueva primera fila $\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A = \boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A - \varepsilon \boldsymbol{u}_0^\top A$.

  De aquí seguimos con punto **1**.

A continuación tenemos un ejemplo del algoritmo Primal-Dual.

↑ día 16

EJEMPLO 3.11. Sea el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$ se tiene que $\boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{0} \in C_F(D)$, ya que $\boldsymbol{\lambda}_0^\top A = \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{c}$. Ademas, $\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A = \boldsymbol{c}^\top > \boldsymbol{0}$ lo que implica $J = \emptyset$. Terminando el paso 1 y obtenemos el siguiente tableau inicial:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$L.D.$
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A$	2	1	4	$\times$	$\times$	
y_1	1	1	2	1	0	3
y_2	2	1	3	0	1	5
z_R	3	2	5	0	0	$8 = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$

Como $J = \emptyset$ solo se incluyen las columnas con sombra azul en el problema restringido. No se efectua el paso 2, ya que la tabla ya es óptima para el problema restringido (no existe ahorro relativo positivo en las columnas azules). En el paso 3 observamos que $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* > 0$ y pasamos al paso 4. Como $\boldsymbol{u}_0^\top A = (3, 2, 5)$ existe j tal que $\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0$ continuamos con paso 5 y encontramos

$$\varepsilon := \min\left\{ \frac{c_j - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j}}{\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j}} : \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \right\} = \frac{1}{2}\,.$$

De aquí, calculamos

$$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A = \boldsymbol{c}^\top - \left(\boldsymbol{\lambda}_0^\top + \epsilon \boldsymbol{u}_0^\top\right) A = \left(2 - \frac{1}{2} * 3, 1 - \frac{1}{2} * 2, 4 - \frac{1}{2} * 5\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$$

y obtenemos $J = \{2\}$, es decir, la columna asociada a x_2 $(A_{:2})$ entra al problema restringido. La tabla inicial es:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$L.D.$
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			
y_1	1	1	2	1	0	3
y_2	2	1	3	0	1	5
z_R	3	2	5	0	0	$8 = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$

y las columnas del problema restringido tienen sombra azul. En el paso 2 aplicamos Fase II, la variable x_2 entra (tiene ahorro positivo) y y_1 sale ya que $\min_{j \in B} \left\{\frac{3}{1}, \frac{5}{1}\right\} = 3$. Pivoteando obtenemos la nueva tabla:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$L.D.$
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			
x_2	1	**1**	2	1	0	3
y_2	1	0	1	-1	1	2
z_R	1	0	1	-2	0	$2 = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$

Hemos llegado a la tabla óptima del problema restringido (columnas azules), ya que $\boldsymbol{r}_N^R \leq \boldsymbol{0}$. Dado que $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* > 0$, y $\boldsymbol{u}_1^\top A = (1,\, 0,\, 1)$ (de la última fila) tiene entradas positivas, continuamos con paso 5. Encontramos ε :

$$\varepsilon := \min\left\{\frac{c_j - \boldsymbol{\lambda}_1^\top a_j}{\boldsymbol{u}_1^\top a_j} : \boldsymbol{u}_1^\top a_j > 0\right\} = \min\left\{\frac{1/2}{1}, \frac{3/2}{1}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Calculamos $\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}^\top A$ para obtener $J = \{1, 2\}$ y los valores:

$$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_2^\top A = \boldsymbol{c}^\top - \left(\boldsymbol{\lambda}_1^\top + \epsilon \boldsymbol{u}_1^\top\right) A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} * 1,\ 0 - \frac{1}{2} * 0,\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} * 1\right) = (0,\ 0,\ 1)\ .$$

Entonces, la tabla inicial del nuevo problema restringido es:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$L.D.$
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_2^\top A$	0	0	1			
x_2	1	1	2	1	0	3
y_2	**1**	0	1	-1	1	2
z_R	1	0	1	-2	0	$2 = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$

En paso 2, aplicamos Fase II. Se ve que x_1 entra $(r_1 > 0)$ y y_2 sale ya que $\min_{j \in B}\left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 2$. Después, de pivotear tenemos:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$L.D.$
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_2^\top A$	0	0	1			
x_2	0	1	1	2	-1	1
x_1	1	0	1	-1	1	2
z_R	0	0	0	-1	-1	$0 = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$

Donde $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* = 0 \to$ STOP (Paso 3).

NOTA. La tabla anterior contiene mucha información, por ejemplo:

1. Si $\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_2^\top A = (0, 0, 1) \geq \boldsymbol{0}^\top$ sabemos que la tabla es dual factible.

2. Si $\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}$ sabemos que la tabla es primal factible.

3. Los dos puntos anteriores implican que hemos encontrado las soluciones óptimas

$$\boldsymbol{\lambda}_2^\top = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1} = (1, 2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (0,\ 1)$$

con valor óptimo

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B = (2, 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \quad , \quad \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{b} = (0,\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\,.$$

(En las columnas asociadas a las variables artificiales se encuentra la matriz A_B^{-1}.)

A continuación daremos las justificaciones de las condiciones planteadas en el algoritmo Primal-Dual. Dichas justificaciones también se encuentran en el libro Luenberger and Ye [2008]. La justificación 1 también se conoce como “Primal-Dual Optimality Theorem”.

6.2. Justificaciones. Para cada argumento se requieren los índices $N := \{1, \ldots, n\} \setminus J$.

#1. Si $\boldsymbol{y}^\star = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{x}^\star$ es solución óptima del problema (P).

DEMOSTRACIÓN. De la hipótesis obtenemos $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^\star = 0$ y $\boldsymbol{x}^\star \in C_F(P)$. Además, supongamos que el $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(D)$ es el más reciente, entonces

$$\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda}^\top A \boldsymbol{x}^\star = \left(\boldsymbol{c}_J^\top \,|\, \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_N\right) \boldsymbol{x}^\star = \boldsymbol{c}_J^\top \boldsymbol{x}_J^\star = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star \,.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x}^\star \in C_F(P)$, $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(D)$ y los valores objetivos son iguales. Por dualidad fuerte se sigue que $\boldsymbol{x}^\star$ es SBF óptima de (P) y $\boldsymbol{\lambda}$ es solución óptima de (D). □

#2. Mostramos que si $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^\star > 0$ y $\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} \leq 0$ para $j \in N$, entonces $C_F(P) = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\boldsymbol{u}_0$ es solución óptima de (D_R) tenemos

$$\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{b} = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^\star > 0 \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} \leq 0 \quad (\text{para } j \in J)\,.$$

Además, por hipótesis tenemos $\boldsymbol{u}_0^\top a_j \leq 0$ para $j \in N$ y concluimos que $\boldsymbol{u}_0^\top A \leq \mathbf{0}^\top$. Como $\boldsymbol{\lambda}_0^\top A \leq \boldsymbol{c}^\top$, podemos definir $\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon := \boldsymbol{\lambda}_0 + \varepsilon \boldsymbol{u}_0 \in C_F(D)$ para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\lambda}_\epsilon^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda}_0^\top \boldsymbol{b} + \varepsilon \boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{b} \to \infty \qquad (\text{cuando } \varepsilon \to \infty),$$

es decir, el dual de (P) no es acotado, con lo cual dualidad debil implica que $C_F(P) = \emptyset$. □

#3. Si $\exists j \in N$ tal que $\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0$, entonces $\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon := \boldsymbol{\lambda}_0 + \varepsilon_0 \boldsymbol{u}_0 \in C_F(D)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} \leq 0$ para $j \in J$, solamente faltan $j \in N$.

a) Para $j\colon \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} \leq 0$ tenemos

$$\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^\top A_{:j} = \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j} + \epsilon \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} \leq \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j} \leq c_j \quad \text{, ya que } \boldsymbol{\lambda}_0 \in C_F(D).$$

para cualquier $\varepsilon > 0$.

b) Para $j\colon \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0$ tenemos que limitar $\varepsilon > 0$, es decir, se requiere $(\boldsymbol{\lambda}_0^\top + \varepsilon \boldsymbol{u}_0^\top) A_{:j} \leq c_j$, es decir

$$\varepsilon \leq \frac{c_j - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j}}{\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j}} \qquad \text{para todo} \qquad j\colon \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0$$

La elección

$$\varepsilon_0 := \frac{c_e - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:e}}{\boldsymbol{u}_0^\top A_{:e}} := \min_{j \in N} \left\{ \frac{c_j - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j}}{\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j}} : \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0 \right\}$$

asegura que $\boldsymbol{\lambda}_1 := \boldsymbol{\lambda}_0 + \epsilon_0 \boldsymbol{u}_0 \in C_F(D)$ y permite que al menos una columna $e \in N$ entra en J, ya que $\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:e} = c_e$. □

Observaciones:

1. *El algoritmo termina y mejora.* El hecho que $\boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{b} = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^\star > 0$, $e \in N$ y $\boldsymbol{u}_0^\top A_{:e} > 0$ implican que $\varepsilon_0 > 0$ y $\boldsymbol{\lambda}_1^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda}_0^\top \boldsymbol{b} + \epsilon_0 \boldsymbol{u}_0^\top \boldsymbol{b} > \boldsymbol{\lambda}_0^\top \boldsymbol{b}$, es decir, el valor óptimo del dual aumenta. Entonces, con cada iteración incluimos por lo menos una nueva columna de A que aumenta el valor óptimo de (D) y reduce el número de columnas que podemos incluir. Como $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esas columnas son finitas y el método termina. En la Fase II (del punto **2**) se usa la regla de Bland para evitar ciclos en el caso degenerado.

2. *Se puede continuar con el tableau anterior.* Para deducir esto, mostramos que se puede usar la misma base $\widetilde{B}$ como base inicial, es decir, las variables básicas se quedan en J. Sea $j \in J$ y x_j básica, entonces su ahorro relativo es cero, es decir, $0 = r_j = \boldsymbol{c}_{\widetilde{B}}^\top A_{\widetilde{B}}^{-1} A_{:j} = \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j}$ ya que $c_j = 0$ en el problema restringido. Por lo tanto, $\boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{:j} = \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j} = c_j$ y $j \in J_+$ donde J_+ es el nuevo conjunto J.

A continuación presentamos un ejemplo en el que el conjunto primal es vacío.

Ejemplo 3.12 (Conjunto primal vacío). Sea el problema

$$\begin{array}{lrcl}
\min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & & \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} & = & 1 \\
& -x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} - x_4 & = & 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0\,.
\end{array}$$

Para dibujar el conjunto factible anterior en el plano, observe que

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} = 1 & \iff & x_2 \leq 1 - x_1 \\
-x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} - x_4 = 3 & \iff & x_2 \geq 3 + x_1
\end{array}$$

La figura muestra el conjunto factible del primal y se puede observar que es vacío.

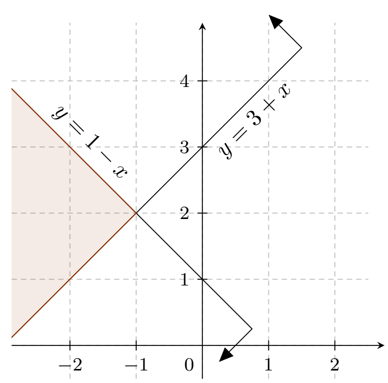


Figura 3.3. Conjunto Primal vacío.

Como en el primer ejemplo tenemos que $\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{0} \in C_F(D)$, ya que $\boldsymbol{c} \geq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\lambda}_0^\top A = \mathbf{0} \leq \boldsymbol{c}$. Adicionalmente, como $\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A = (1,\, 2,\, 3,\, 4) > \mathbf{0}$ tenemos $J = \emptyset$ y el *tableau* inicial para el problema restringido (con sombra azul) es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	$L.D.$
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A$	1	2	3	4			
y_1	1	1	1	0	1	0	1
y_2	-1	1	0	-1	0	1	3
z_R	0	2	1	-1	0	0	$4 = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$

Esa ya es la tabla óptima del problema restringido (no existe un ahorro relativo positivo). Saltamos el paso 3 (ya que $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* > 0$) y paso 4 (ya que la última fila $\boldsymbol{u}_0^\top A$ tiene entradas positivas). En paso 5 encontramos $\varepsilon := \min \left\{ \frac{c_j - \boldsymbol{\lambda}_0^\top a_j}{\boldsymbol{u}_0^\top a_j} : \boldsymbol{u}_0^\top a_j > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{3}{1} \right\} = 1$ y actualizamos

$$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A = \boldsymbol{c}^\top - \left(\boldsymbol{\lambda}_0^\top + \varepsilon \boldsymbol{u}_0^\top\right) A = (1 - 1 * 0,\, 2 - 1 * 2,\, 3 - 1 * 1,\, 4 - (-1) * 1) = (1, 0, 2, 5)$$

para obtener $J = \{2\}$ y la nueva tabla del problema restringido:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	$L.D.$
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A$	1	0	2	5			
y_1	1	**1**	1	0	1	0	1
y_2	-1	1	0	-1	0	1	3
z_R	0	2	1	-1	0	0	$4 = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$

De aquí empezamos Fase II (para el problema restringido). Se ve que x_2 entra (tiene el único ahorro positivo con sombra azul) y y_1 sale ya que $\min_{j \in B} \left\{ \frac{1}{1}, \frac{3}{1} \right\} = 1$. Pivoteando obtenemos

	a_1	a_2	a_3	a_4	y_1	y_2	$L.D.$
$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A$	1	0	2	5			
x_2	1	**1**	1	0	1	0	1
y_2	-2	0	-1	-1	-1	1	2
z_R	-2	0	-1	-1	-2	0	$2 = \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^*$

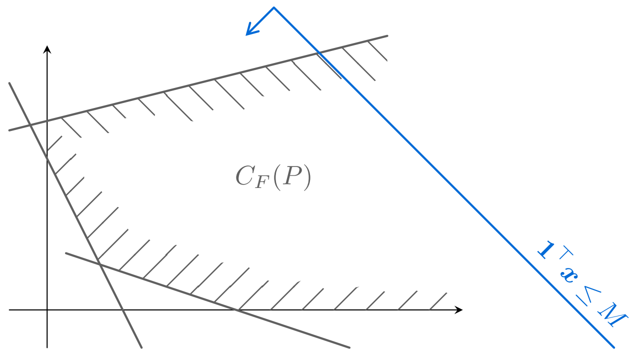
De la tabla anterior observamos que $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}^* > 0$. En el paso 4, observamos que $\boldsymbol{u}_1^\top A = (-2, 0, -1, -1) \leq \mathbf{0}$, lo cual implica $C_F(P) = \emptyset$ $\rightarrow$ STOP.

↑ día 17

6.3. ¿Qué hacer si existe un costo negativo?

Lo que sigue se requiere solamente cuando minimizamos nuestro problema estándar y existe $c_j < 0$, ya que $\mathbf{0} \notin C_F(D)$. En este caso el primal podría ser no acotado y el $C_F(D)$ podría ser vació. Entonces, para evitar que $C_F(D) = \emptyset$ la idea es acotar las variables del primal con una restricción artificial, por ejemplo, $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \leq M$ donde $M \gg 1$ es una constante suficientemente grande (detalles después).

Intuición:



Entonces, definimos un problema auxiliar con una restricción adicional que acota $C_F(P)$. Para mantener las restricciones en igualdades incluimos esta restricción junto con una variable de holgura, h_1 con costo cero y obtenemos

$$\left[\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + 0 \cdot h_1 \\ \text{sujeto a} & \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbb{1}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ M \end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\,,\ h_1 \geq 0\,. \end{array}\right] \qquad (P_{aux})$$

Observaciones:

- Si $C_F(P)$ es acotado, entonces existe $M \gg 1$ tal que $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \leq M$ para cada $\boldsymbol{x} \in C_F(P)$. En este caso (para M suficientemente grande) podemos escribir "$C_F(P_{aux}) = C_F(P)$" ya que $\boldsymbol{x} \in C_F(P) \iff (\boldsymbol{x}, h_1) \in C_F(P_{aux})$ con $h_1 = M - \mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \geq 0$.
- En general tenemos "$C_F(P_{aux}) \subseteq C_F(P)$" ya que $(\boldsymbol{x}, h_1) \in C_F(P_{aux}) \implies \boldsymbol{x} \in C_F(P)$.

Abajo veremos que siempre es inmediato definir un elemento del dual del problema (P_{aux}). Eso permite resolver el problema con el algoritmo Primal-Dual. Una vez resuelto, queremos deducir propiedades del problema original (P). Para eso, se requiere que $M \gg 1$ es tal que $C_F(P_{aux}) \neq \emptyset$ cuando $C_F(P) \neq \emptyset$. Después, veremos una solución incompleta a ese problema.

El dual de (P_{aux}) es:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda} + M \cdot \lambda_{m+1} \\ \text{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{\lambda} + \lambda_{m+1} \mathbb{1} \leq \boldsymbol{c} \\ & \lambda_{m+1} \leq 0 \\ & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m \end{array}\right] \qquad (D_{aux})$$

Observaciones:

- Siempre tiene el punto factible $(\boldsymbol{\lambda},\, \lambda_{m+1}) = (\mathbf{0}_m,\, \min_j \{c_j, 0\}) \in C_F(D_{aux})$.
  Aquí, se nota que la restricción artificial $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \leq M$ se puede cambiar por $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} \leq M$ donde $\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^n$ es tal que su entrada $w_j = 1 \iff c_j < 0$.
- Además, $C_F(D) \subseteq C_F(D_{aux})$, en el sentido $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(D) \iff (\boldsymbol{\lambda}, 0) \in C_F(D_{aux})$.
  Note que la relación de los subconjuntos se invierte al dualizar.

6.3.1. ¿Cómo evaluar los resultados? Los siguientes argumentos permiten evaluar el resultado cuando se resuelve el problema (P_{aux}) con el algoritmo Primal-Dual. De hecho, los problemas auxiliares permiten determinar 3 casos del Teorema 3.6 .

1. Si M es suficientemente grande y (D_{aux}) **no** es acotado, entonces $C_F(P) = \emptyset$.
Demo. Supongamos que $\boldsymbol{x} \in C_F(P)$ es tal que $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \leq M$ (M suficientemente grande). Entonces $(\boldsymbol{x}, M - \mathbb{1}^\top \boldsymbol{x}) \in C_F(P_{aux})$. Por lo tanto, por dualidad débil existe una cota superior para el valor óptimo de (D_{aux}). Esto contradice la hipótesis. □

2. Si M es suficientemente grande y (D_{aux}) tiene solución óptima con $\lambda_{m+1} < 0$, entonces (P) no es acotado.
Demo. Dado que $\lambda_{m+1} < 0$ implica $C_F(D) = \emptyset$ y la solución óptima $(\boldsymbol{x}, h_1)$ de (P_{aux}) es tal que $\boldsymbol{x} \in C_F(P)$, tenemos $C_F(P) \neq \emptyset$ y (P) no es acotado por el Teorema 3.6 . □

3. Si (D_{aux}) tiene solución óptima con $\lambda_{m+1} = 0$, entonces también (D) y (P).
Demo. Obviamente $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(D)$ es solución óptima de (D), por lo tanto (P) también tiene solución óptima (ver el Teorema 3.6). □

Advertencia: Las implicaciones **1** y **2** solo son válidas si M es suficientemente grande. Hasta donde sabemos no existe una cota inferior o superior para M que asegure que $C_F(P_{aux})$ contiene la solución óptima de (P) cuando esa existe. Para asegurar que las decisiones sean correctas, la recomendación es calcular con un símbolo para M.

Observación: El *tableau* del algoritmo Primal-Dual siempre muestra el valor de λ_{m+1}, ya que $\boldsymbol{c}_{aux} = (\boldsymbol{c}, 0)$ y la última entrada del vector

$$\boldsymbol{c}_{aux}^\top - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \lambda_{m+1} \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbb{1}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad -\lambda_{m+1}\,.$$

6.3.2. Una solución incompleta para escoger M .
La siguiente idea funciona para nuestros ejemplos, pero estamos consientes que la idea no funciona en general, ya que el argumento permite construir un contraejemplo. Recordamos que la restricción artificial $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \leq M$ es un semiespacio. El dibujo sugiere la siguiente idea. Debemos (por lo menos) asegurar que las intersecciones positivas de los hiperplanos $A_{i:}\boldsymbol{x} = b_i$ con los ejes canónicos se encuentran dentro del semiespacio $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \leq M$. Dado que $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ estas intersecciones son $(\boldsymbol{v}_j = x_j \boldsymbol{e}_j)$ con $A_{i:}\boldsymbol{v}_j = b_i \iff A_{ij}x_j = b_i$.

Si $A_{ij} > 0$, entonces $x_j \geq 0$ y no debe ser cortado por la restricción $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{v}_j = x_j \leq M$.

Todos esos vértices son
$$\left\{ \boldsymbol{v}_j \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{v}_j = x_j \boldsymbol{e}_j \,,\; x_j = \frac{b_i}{A_{ij}} \text{ con } A_{ij} > 0 \right\} .$$

Concluimos que podemos tomar
$$M > \max_{i=1..m} \max_{j=1..n} \left\{ \frac{b_i}{A_{ij}} \,,\; A_{ij} > 0 \right\} .$$

Nota 3.11. Para obtener $C_F(D_{aux}) \neq \emptyset$ hemos observado que $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \leq M$ se puede cambiar por $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} \leq M$ donde $\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^n$ es tal que su entrada $w_j = 1 \iff c_j < 0$. Con este cambio se reduce el máximo sobre las columnas al subconjunto donde $c_j < 0$.

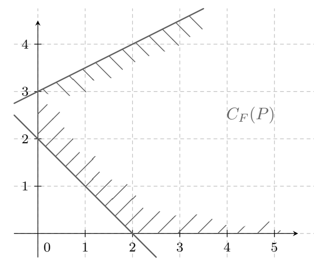
6.3.3. Resolver los problemas auxiliares con el algoritmo Primal-Dual.
Construimos un problema tal que exista $\boldsymbol{c}$ con $c_j < 0$ (para algún j) de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

que tenga solución óptima.

En el siguiente dibujo y problema asociado, se presenta este caso.

$$\begin{array}{ll} \min & x - y \\ \text{sujeto a} & -x + 2y \leq 6 \\ & x + y \geq 2 \\ & x, y \geq 0\,. \end{array}$$



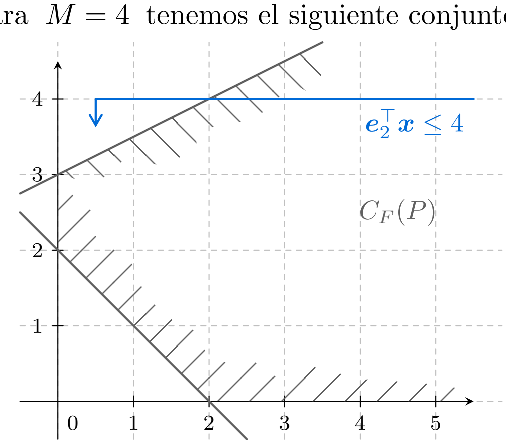
Al renombrar $x_1 \coloneqq x$, $x_2 \coloneqq y$ sumar o restar variables de holgura obtenemos el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & (1,-1,0,0)^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array} \tag{P}$$

Consideramos la Nota 3.11 para definir una restricción adicional. Esta solo afecta la variable x_2 ya que únicamente $c_2 < 0$. Primero determinamos M suficientemente grande:

$$M > \max_i \max_j \left\{ \frac{b_i}{A_{ij}} : A_{ij} > 0\,,\ c_j < 0 \right\} = \max \left\{ \frac{6}{2}, \frac{2}{1} \right\} = 3.$$

En coordenadas originales para $M = 4$ tenemos el siguiente conjunto factible del problema (P_{aux}):



↑ día 18

ATENCIÓN: El M, que hemos determinado, solo funciona si usamos la restricción que solo restringe x_2. Nuesto problema auxiliar es

$$\left[\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^\top x + 0\cdot h_1 \\ \text{sujeto a} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 = M \end{pmatrix} \\ & x \geq \mathbf{0}\,,\ h_1 \geq 0\,. \end{array}\right] \qquad (P_{aux})$$

De aquí, resolvemos con el algoritmo Primal-Dual.

S.1 Para eso notamos

$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{aux}}^\top = (0,0,\min_j c_j) = (0,0,-1)\,,$$

$$A_{\text{aux}} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ e_2^\top & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad c_{\text{aux}}^\top = (c^\top, 0) = (1,-1,0,0,0)\,.$$

y

$$c_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_{\text{aux}}^\top A_{\text{aux}} = (1,-1,0,0,0) - (-1)(0,1,0,0,1) = (1,0,0,0,1)\,.$$

De este modo, el primer Tableau queda:

	$A_{:1}$	$A_{:2}$	$A_{:3}$	$A_{:4}$	$A_{:5}$	y_1	y_2	y_3	$L.D.$	
$c_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{\text{aux}}$	1	0	0	0	1					
y_1	-1	2	1	0	0	1	0	0	6	
y_2	1	**1**	0	-1	0	0	1	0	2	
y_3	0	1	0	0	1	0	0	1	4	$= M$
z_R	0	4	1	-1	1	0	0	0	12	$= \mathbb{1}^\top y$

S.2 Observe que la fila de $c_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{\text{aux}}$ es cero en las columnas $J = \{2,3,4\}$. De este modo se tiene que aplicar Fase II para optimizar la tabla y fila de z_R. Dejamos entrar x_2, la variable que sale es y_2 ya que el $\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{2}{1}, \frac{M}{1}\right\}$ se encuentra en la segunda fila. Haciendo el cambio obtenemos:

	$A_{:1}$	$A_{:2}$	$A_{:3}$	$A_{:4}$	$A_{:5}$	y_1	y_2	y_3	$L.D.$	
$c_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{\text{aux}}$	1	0	0	0	1					
y_1	-3	0	1	2	0	1	-2	0	2	
x_2	1	1	0	-1	0	0	1	0	2	
y_3	-1	0	0	1	1	0	-1	1	2	$= M - 2$
z_R	-4	0	1	3	1	0	-4	0	4	$= \mathbb{1}^\top y$

Ahora, dejamos entrar x_4. Sale y_1 ya que el $\min\left\{\frac{2}{2},\frac{2}{1}\right\}$ se encuentra en fila 1. El cambio da:

	$A_{:1}$	$A_{:2}$	$A_{:3}$	$A_{:4}$	$A_{:5}$	y_1	y_2	y_3	$L.D.$	
$\boldsymbol{c}_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{\text{aux}}$	1	0	0	0	1					
x_4	$-3/2$	0	$1/2$	1	0	$1/2$	-1	0	1	
x_2	$-1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	0	3	
y_3	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$	0	1	1	$= M-3$
z_R	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	$-3/2$	-1	0	1	$= \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}$

Dado que $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y} > 0$ continuamos con paso 4.

S.4 Los números en la fila z_R representan el producto $\boldsymbol{u}_0^\top A$. Como existen entradas positivas continuamos con paso 5.

S.5 ¿Cuál columna entra? Determinamos cual columna entra. Para eso calculamos

$$\epsilon_0 := \min_{j\in N}\left\{\frac{c_{\text{aux},j} - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{:j}}{\boldsymbol{u}_0^\top A_{:j}} : \boldsymbol{u}_0^\top A_{:j} > 0\right\} = \min\left\{\frac{1}{1/2},\frac{1}{1}\right\} = 1\,.$$

Con ese valor calculamos la nueva fila $\boldsymbol{c}_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{\text{aux}}$:

$$\boldsymbol{c}_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top A_{\text{aux}} = \boldsymbol{c}_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{aux} - \epsilon_0 \boldsymbol{u}_0^\top A_{\text{aux}} = \left(1-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$$

lo que implica que la columna $A_{:5}$ entra y $A_{:3}$ sale. Obtenemos la siguiente nueva tabla

	$A_{:1}$	$A_{:2}$	$A_{:3}$	$A_{:4}$	$A_{:5}$	y_1	y_2	y_3	$L.D.$	
$\boldsymbol{c}_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{\text{aux}}$	$1/2$	0	$1/2$	0	0					
x_4	$-3/2$	0	$1/2$	1	0	$1/2$	-1	0	1	
x_2	$-1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	0	3	
y_3	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$	0	1	1	$= M-3$
z_R	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	$-3/2$	-1	0	1	$= \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}$

Continuamos con paso 2 y el nuevo $J = \{2,4,5\}$.

S.2 Solo puede entrar $h_1 = x_5$, y sale y_3 como tiene el único pivote positivo. El cambio da:

	$A_{:1}$	$A_{:2}$	$A_{:3}$	$A_{:4}$	$A_{:5}$	y_1	y_2	y_3	$L.D.$	
$\boldsymbol{c}_{\text{aux}}^\top - \boldsymbol{\lambda}_0^\top A_{\text{aux}}$	$1/2$	0	$1/2$	0	0					
x_4	$-3/2$	0	$1/2$	1	0	$1/2$	-1	0	1	
x_2	$-1/2$	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	0	3	
y_3	$1/2$	0	$-1/2$	0	1	$-1/2$	0	1	1	$= M-3$
z_R	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	$= \mathbb{1}^\top \boldsymbol{y}$

Como $\mathbb{1}^\top \boldsymbol{y} = 0$ hemos encontrado la solución óptima de (P_{aux}) (y (D_{aux})). Como $\lambda_{m+1} = 0$ estamos en el caso 3, y la solución optima de (P) es $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,3,0,1)$. El valor óptimo es $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_{opt} = -3$.

7. Conos y el lema de Farkas

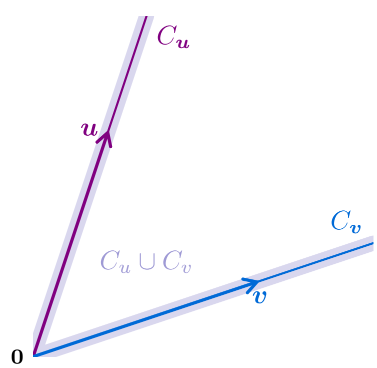
Para obtener la intuición geométrica en esta sección nos inspiramos en el libro de Matousek and Gärtner [2007]. Pero basamos la demostración del Lema de Farkas en el libro de Ferris et al. [2007].

DEFINICIÓN 3.4. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es un *cono* si $\boldsymbol{v} \in C \implies \alpha\boldsymbol{v} \in C$ para todo $\alpha \geq 0$.

Observaciones y problemas sencillos:

- Los conjuntos $\emptyset, \mathbb{R}^n$ son conos. Además, cualquier cono $C \neq \emptyset$ contiene el origen $\mathbf{0}$.
- Sea $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ un punto entonces $C_{\boldsymbol{v}} \coloneqq \{\alpha\boldsymbol{v} \colon \alpha \geq 0\}$ es el *cono generado* por $\boldsymbol{v}$.
  (Es la mitad de la recta que pasa por $\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{v}$.)
- Dado dos conos $C_{\boldsymbol{u}}$ y $C_{\boldsymbol{v}}$, la unión de ellos $C_{\boldsymbol{u}} \cup C_{\boldsymbol{v}}$ es un cono, pero no es convexo.
- Encuentre el cono generado por $\boldsymbol{v} = \binom{3}{1}$.
- Encuentre el cono "mínimo" que contenga a los puntos $\boldsymbol{v} = \binom{3}{1}$ y $\boldsymbol{u} = \binom{1}{3}$.
- Dado $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, verifique que el conjunto $C_A \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}\, ,\, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ es cono y es convexo. Al conjunto C_A lo llamamos *cono convexo*.
- Encuentre 3 puntos en $\mathbb{R}^2$ tal que el cono convexo asociado es $\mathbb{R}^2$. ¿Se puede con 2?

Nuestro problema estándar tiene puntos factibles si y solo si $\boldsymbol{b} \in C_A$, es decir, $\boldsymbol{b}$ pertenece al cono C_A o más explicitó $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal no-negativa de columnas de A. Geométricamente, el Lema de Farkas dice que $\boldsymbol{b} \in C_A$ o existe un hiperplano que separe $\boldsymbol{b}$ y el cono C_A.



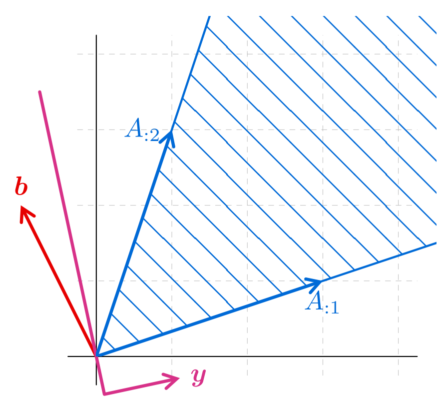


FIGURA 3.4. En la izquierda se ven los conos $C_{\boldsymbol{u}}, C_{\boldsymbol{v}}$ y su unión $C_{\boldsymbol{u}} \cup C_{\boldsymbol{v}}$. En la derecha se ve el cono convexo C_A generado con $A = \left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{smallmatrix}\right)$, el vector $\boldsymbol{b}$ y el hiperplano con normal $\boldsymbol{y}$ que separa $\boldsymbol{b}$ del cono C_A.

Lema 3.12 (Lema de Farkas). *Sean* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *y* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.
Entonces, exactamente uno de lo siguientes enunciados se cumple:

$$\text{\textit{El siguiente sistema tiene solución}} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad y \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\,. \tag{$\|$}$$

$$\text{\textit{Existe un vector} } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \text{ \textit{tal que}} \quad A^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \quad y \quad \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < 0\,. \tag{$\perp$}$$

Nota. Si suponemos la existencia de una solución de por lo menos uno de los dos sistemas, entonces la demostración se simplifica a la siguiente:

Demo. (incompleta, ya que supone la existencia de una solución). Primero suponga que el sistema ($\|$) tiene solución, es decir, existe $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Entonces, para todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ se cumple

$$\boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}\,.$$

Si fuera $A^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ ya que $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. Por lo tanto, el sistema ($\perp$) no tiene solución.

Ahora, suponga que existe un vector $\boldsymbol{y}$ tal que $A^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < 0$. En este caso no puede existir un vector $\boldsymbol{x}$ que es solución de ($\|$), ya que de su existencia y de $A^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ podemos deducir

$$0 \leq \boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}\,,$$

lo cual no es compatible con $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < 0$. $\square$

Demostración. Primero suponga que el sistema ($\|$) tiene solución. En este caso, la prueba incompleta muestra que el segundo sistema no tiene solución.

Ahora, suponga que el sistema ($\|$) no tiene solución. Entonces, debemos mostrar que el sistema ($\perp$) tiene solución. Definimos un problema auxiliar de P.L. y su dual

$$(P)\begin{bmatrix} \min & \mathbf{0}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0} \end{bmatrix}(D)$$

Como ($\|$) no tiene solución, (P) tiene $C_F(P) = \emptyset$. Pero $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \in C_F(D)$ y por el Teorema 3.6 de Dualidad (D) no es acotado. Por lo cual, existe $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(D)$: $A^\top \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda} > 0$. Sea $\boldsymbol{y} := -\boldsymbol{\lambda}$, entonces tenemos $A^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < 0$, es decir, una solución al sistema ($\perp$). $\square$

NOTA. El Lema de Farkas se usa para demostrar muchos resultados en optimización lineal y no lineal. Por lo tanto, consideramos útil mencionar las varias formas de escribir el Lema de Farkas. La siguiente tabla presenta un resumen tomado del libro [Matousek and Gärtner, 2007, p. 92].

	El sistema $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$	El sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
tiene sol. $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ si y solamente si	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}^\top A \geq \boldsymbol{0}$ $\implies \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \geq 0$	$\boldsymbol{y}^\top A \geq \boldsymbol{0}$ $\implies \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \geq 0$
tiene sol. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ si y solamente si	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}^\top A = \boldsymbol{0}$ $\implies \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \geq 0$	$\boldsymbol{y}^\top A = \boldsymbol{0}$ $\implies \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} = 0$

En el siguiente corolario se demuestra la celda sombreada.

COROLARIO 3.13. *Sean* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *y* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$*. Entonces, el sistema* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ *tiene solución si y solamente si cada* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ *con* $\boldsymbol{y}^\top A \geq \boldsymbol{0}$ *también satisface* $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. La segunda parte de la equivalencia es la negación del segundo enunciado del Lema de Farkas y esta inspirada por el argumento de su prueba. □

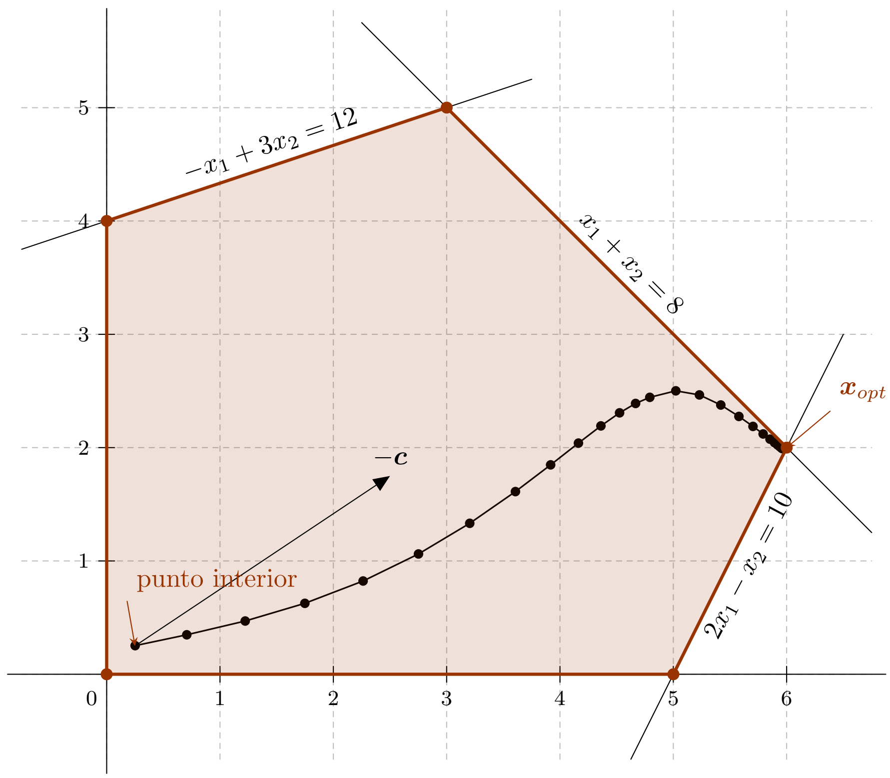
↑ día 19

Capítulo 4

Puntos Interiores

Hasta ahora vimos algoritmos que generan una sucesión de soluciones básicas factibles (o vértices) para llegar a una SBF óptima. El problema de Klee-Minty (visto en el proyecto) tiene un número de vértices que crece exponencialmente en la dimensión del problema. Para evitar crecimiento exponencial se debe evitar pasar por los vértices. La idea es usar puntos interiores. Esa idea permitió demostrar que cualquier problema de P.L. se puede resolver en tiempo polinomial.

Típicamente los algoritmos generan una sucesión de **puntos interiores** (en el relativo interior) del conjunto factible cuyo límite es un vértice optimo.



Intuición: El dibujo muestra la idea y que la dirección de mayor descenso (en $\|\cdot\|_2$) NO siempre es la mejor. Las preguntas que estamos interesados en contestar son:

¿Cómo escoger "buenas"direcciones?

¿Cómo ver si nos acercamos a una SBF óptima?

1. Las condiciones KKT

Veremos que las condiciones *KKT* (de Karush, Kuhn y Tucker) nos permitirán contestar las dos últimas preguntas. En general, las condiciones KKT son una serie de condiciones necesarias que satisface una solución (local) óptima de problemas de optimización no lineal, ver [Luenberger and Ye, 2008, p.352]. Para un problema de P.L., esas condiciones se simplifican a las condiciones de factibilidad (primal y dual) y a las condiciones de complementaridad. Más aún estas condiciones son necesarias y suficientes para optimalidad.

DEFINICIÓN 4.1. Para un problema de P.L., digamos (P), las *condiciones KKT* son:

a) $\boldsymbol{x}$ es primal factible, es decir $\boldsymbol{x} \in C_F(P)$.

b) $\boldsymbol{\lambda}$ es dual factible, es decir $\boldsymbol{\lambda} \in C_F(D)$.

c) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ cumplen las condiciones de complementaridad (necesarias y suficientes para la optimalidad).

NOTA. En un curso de Optimización Numérica se ve una definición más general.

Para nuestro problema estándar

$$\begin{bmatrix} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.a.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{P}$$

y su dual

$$\begin{bmatrix} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.a.} & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \tag{D}$$

las condiciones KKT son:

a) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.

b) $A^\top \boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{c} \iff A^\top \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ (con variables de holgura $\boldsymbol{z}$).

c) El Teorema 3.8 (de complementaridad)[1] dice que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ son soluciones óptimas si y solo si

$$z_j = c_j - A_{:j}^\top \boldsymbol{\lambda} > 0 \implies x_j = 0 \qquad \text{y} \qquad x_j > 0 \implies z_j = c_j - A_{:j}^\top \boldsymbol{\lambda} = 0\,.$$

Dado que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ esas implicaciones equivalen a

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \iff x_j z_j = 0 \quad \text{para} \quad j \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

[1] También, existe una versión para el problema primal y dual simétrico, [Luenberger and Ye, 2008, p.110].

2. El método de Newton

Aplicamos el método de Newton a las condiciones KKT. Se puede decir que el método de Newton es un método primal-dual, ya que se resuelve (si es posible) el problema primal y dual simultáneamente.

Primero recolectamos las condiciones KKT en una función:

$$F\left(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{z}\right) := \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ A^{\top}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c} \\ X Z\, \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \geq \mathbf{0}.$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se ve que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z})$ satisfacen las condiciones KKT si y solo si $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$ y $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \mathbf{0}$.

El objetivo del método es generar iterativamente $\left(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{z}^k\right)$, cuyo límite cuando $(k \to \infty)$ satisface (4.1). Además, pedimos que esa sucesión se acerca desde el interior a una solución óptima. Los puntos interiores para nuestro problema primal y dual son elementos del conjunto Ω° donde

$$\begin{aligned} \Omega^\circ &:= \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z})\colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ A^{\top}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c},\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) > \mathbf{0}\right\} \\ &\subsetneq \Omega := \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z})\colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ A^{\top}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c},\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \mathbf{0}\right\}. \end{aligned}$$

Nota. Por el Teorema 3.6 sabemos que $\Omega \neq \emptyset$ si y solo si (P) y (D) tienen solución óptima.

La teoría del método de Newton es más sencilla si empezamos en un punto interior, es decir, un elemento del conjunto Ω°. Cuando pedimos que $\boldsymbol{x}^k > \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{z}^k > \mathbf{0}$, estos puntos satisfacen $x_j z_j > 0\ (j \in \{1, \ldots, n\})$ y por lo tanto NO son óptimos, y tenemos

$$F\left(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{z}^k\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_n \\ X^k Z^k\, \mathbb{1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k > \mathbf{0}.$$

Dado un punto $\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right) \in \Omega^\circ$ *un paso* determina una dirección factible (y un nuevo punto en esa dirección) usando una medida que decide que tan deseable es un punto en esa dirección.

Nota. En la práctica, se puede empezar cerca de un punto interior, es decir, en un punto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z})$ con $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) > \mathbf{0}$ que resuelva aproximadamente las restricciones de igualdad.

Ejemplo 4.1. Recuerde que el método de Newton en una variable pide $\left[f'(x^0)\right]\delta_x + f(x^0) = 0$ donde $\delta_x \coloneqq x^1 - x^0$. Por lo tanto, dado $\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right) \in \Omega^\circ$, un método de Newton para el sistema (4.1) determina la *dirección de Newton* $(\boldsymbol{\delta}_x,\, \boldsymbol{\delta}_\lambda,\, \boldsymbol{\delta}_z)$ resolviendo el sistema

$$J\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_x \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda \\ \boldsymbol{\delta}_z \end{pmatrix} = -F\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right), \tag{D_N}$$

donde

$$J\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^\top & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad -F\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_n \\ -X^0 Z^0\, \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

En general, la solución del sistema NO cumple que $\left(\boldsymbol{\delta}_x,\, \boldsymbol{\delta}_z\right) \geq \mathbf{0}$. Entonces, escogemos $\alpha_x \in [0,1]$ y $\alpha_z \in [0,1]$ tal que el nuevo punto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^1 &= \boldsymbol{x}^0 + \alpha_x \boldsymbol{\delta}_x\,, \\ \left(\boldsymbol{\lambda}^1,\, \boldsymbol{z}^1\right) &= \left(\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right) + \alpha_z\left(\boldsymbol{\delta}_\lambda,\, \boldsymbol{\delta}_z\right) \end{aligned}$$

satisface $\left(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{z}^1\right) > \left(\mathbf{0}, \mathbf{0}\right)$, es decir, $\left(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{z}^1\right) \in \Omega^\circ$.

Nota. Lo más conveniente para parar el ciclo de Newton es pedir $\left\|F(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{z}^k)\right\|_\infty < \text{tol}$, ya que para cualquier dimensión pedimos la misma precisión (tolerancia) a cada entrada. Usando la norma $\|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_1$ el mismo criterio introduce una dependencia de la dimensión. Por ejemplo, si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ y los "errores" son equi-distribuidos, entonces el criterio $\left\|F(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{z}^k)\right\|_1 < \text{tol}$ en realidad pide $|x_i z_i| < \text{tol}/n$.

Nota. En el problema de Klee-Minty podemos observar que el método de Newton funciona muy bien cuando se inicia con un punto interior.

Nota. En general no conocemos un punto interior para empezar y por ello tenemos el siguiente PROBLEMA: Si el punto inicial queda fuera de Ω°, entonces con el uso de la pura dirección de Newton (D_N) podemos tener dificultades para llegar a la solución óptima. Esto se debe a que la solución óptima se encuentra en la frontera y tiene (por el teorema de complementaridad) entradas iguales a cero. Por lo mismo el proceso de Newton puede ser lento, puesto que $\alpha_x, \alpha_z \approx 0$ cuando $\boldsymbol{\delta}_x, \boldsymbol{\delta}_z$ poseen entradas negativas justo donde $\boldsymbol{x}^k$, $\boldsymbol{z}^k$ son casi cero. Además, si $\boldsymbol{x}^k$ y $\boldsymbol{z}^k$ son casi cero en la misma entrada, entonces la matriz $J(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{z}^k)$ es casi singular.

Por eso, conviene acercar la sucesión a puntos que estan "uniformemente" en Ω° y que se acercan sucesivamente a la solución óptima. Eso lleva a la idea de moverse sobre la trayectoria central *(central path)* que formalizamos en la siguiente sección.

↑ día 20

2.1. La trayectoria central. Vimos que puntos interiores $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}) \in \Omega^\circ$ NO son óptimos, ya que $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} = \alpha > 0$. Pero dejando $\alpha \to 0$ tales puntos se acercan a la solución óptima (si existe). La siguiente definición pide eso uniformemente, es decir, para cada producto de entradas $x_i z_i$.

Definición 4.2. La *trayectoria central* es un conjunto $\mathcal{T}_c$ que consiste de puntos interiores $(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau) \in \Omega^\circ$ que satisfacen $x_i z_i = \tau$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ para un $\tau > 0$.

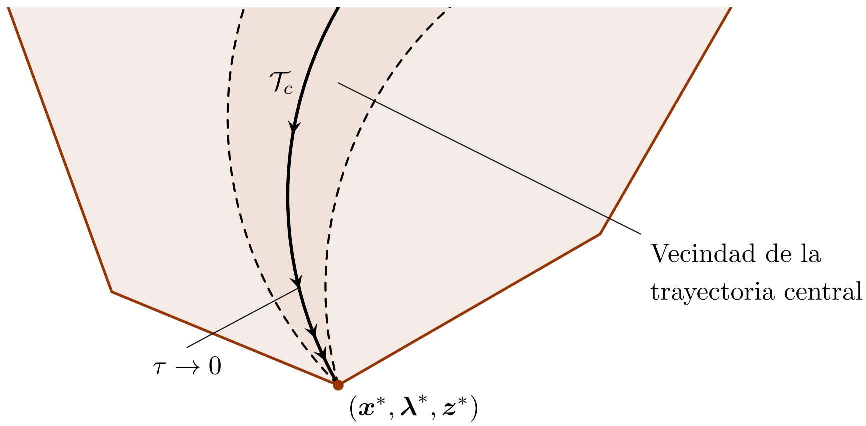


Figura 4.1. Visualización de la trayectoria central y una vecindad.

Nota. Se puede mostrar que $(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau)$ es solución única (para $\tau > 0$ fijo) si y solo si $\Omega^\circ \neq \emptyset$, ver [Nocedal and Wright, 2006, p. 399]. El siguiente bosquejo de la demostración nos mostrará esa propiedad cerca de la solución óptima y nos permitirá usar esta información para diseñar un método que se acerca a la trayectoria central y la sigue hacia la solución óptima.

Bosquejo. Consideramos la función F en (4.1) y una solución óptima $\left(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{z}^*\right)$. Si la matriz $F' = J_F$ es regular $(\det(J_F) \neq 0)$ en esa solución, entonces (usando el Teorema de la función implícita) existe un intervalo $I = (\alpha, \beta)$ y un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^{n+m+n}$ que contiene $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{z}^*)$ tales que para $\tau \in I$ existe un único punto $(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau)$ con

$$F(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_n \\ \tau \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \tau > 0\,, \tag{4.2}$$

es decir, la trayectoria central pasa por esa solución óptima y

$$\tau \to +0 \implies (\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau) \to (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{z}^*) \in \Omega\,.$$

□

Nota. Para un $\tau > 0$ fijo, la dirección de Newton asociada a la ecuación (4.2) es tal que el nuevo punto se acerca a un punto en $\mathcal{T}_c$ (no salimos “temprano” de Ω°). Deseamos acercarnos a la solución óptima, es decir, tenemos que reducir τ.

¿Cómo reducir τ y mantenernos cerca de la trayectoria central?

Definimos $\tau := \sigma\mu$ donde

$$\sigma \in [0,1] \qquad \text{(en Ingles } \sigma \text{ es llamado } \textit{centering parameter}\text{)}$$

$$\mu = \frac{1}{n}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} \qquad \text{(es una } \textit{medida de complementaridad}.\text{)}$$

Entonces, la dirección de Newton para acercarnos a la solución de la ecuación (4.2), cumple

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^\top & I \\ Z^0 & 0 & X^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_x \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda \\ \boldsymbol{\delta}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_n \\ -X^0 Z^0 \mathbb{1} + \sigma\mu\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Comentarios:

1. La dirección de Newton (D_N) apunta hacia $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{z}^*)$.

2. Si $\sigma = 0$ entonces (D_N)=(4.3) y las direcciones coinciden.

3. La dirección (4.3) es la dirección central hacia $(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau) \in \mathcal{T}_c$.
Haciendo este paso con $\sigma = 1$ llegamos a la trayectoria central $\mathcal{T}_c$ PERO no se reduce μ.

4. Algunos autores llaman a esa dirección *affine scaling direction*.

5. La mayoría de métodos, toma $\sigma \in (0,1)$ para acercarse a la $\mathcal{T}_c$ y reducir la medida de complementaridad en el mismo paso.

2.2. El algoritmo en la práctica. Hasta aquí, pensábamos que conocemos un punto interior $\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right) \in \Omega^\circ$. Pero eso, significaría que conocemos una solución primal y dual factible $\boldsymbol{x} \in C_F(P)$ y $\left(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}\right) \in C_F(D)$, que es difícil.

Por lo tanto, en la práctica empezamos con $\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right)$ tal que $\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{z}^0\right) > \mathbf{0}$ y los residuos son distintos de cero:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b} &=: \boldsymbol{r}_P^0 \neq \mathbf{0}\,, \\ A^\top \boldsymbol{\lambda}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c} &=: \boldsymbol{r}_D^0 \neq \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

En este caso, un paso de Newton también reduce los residuos. A continuación presentamos el Algoritmo Primal-Dual de Puntos Interiores.

Algoritmo: Primal-Dual de Puntos Interiores

Dado $\boldsymbol{w}^0 := \left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0\right)$ con $\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{z}^0\right) > 0$, una tolerancia $0 < \mathrm{tol} \ll 1$ y

$$\mu_0 := \frac{1}{n}\left\langle \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{z}^0 \right\rangle\,, \quad k := 0 \quad \text{y} \quad \sigma \in (0,1)\,.$$

Mientras $\left\|F\left(\boldsymbol{w}^k\right)\right\|_\infty > \mathrm{tol}$ y $k \in \{0, 1, \dots, 300\}$.

1. Resuelve

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^\top & I \\ Z^k & 0 & X^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_x \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda \\ \boldsymbol{\delta}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{r}_P^k \\ -\boldsymbol{r}_D^k \\ -X^k Z^k \mathbb{1} + \sigma \mu_k \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

donde

$$\boldsymbol{r}_P^k := A\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{r}_D^k := A^\top \boldsymbol{\lambda}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}\,.$$

2. Encuentra $\alpha_x, \alpha_z \in (0,1]$ tal que

$$\boldsymbol{x}^k + \alpha_x \boldsymbol{\delta}_x \geq \mathbf{0}\,, \qquad \boldsymbol{z}^k + \alpha_z \boldsymbol{\delta}_z \geq \mathbf{0}\,.$$

3. Actualizar

$$\boldsymbol{w}^{k+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k} \\ \boldsymbol{\lambda}^{k} \\ \boldsymbol{z}^{k} \end{pmatrix} + \frac{999}{1000} \begin{pmatrix} \alpha_x\, \boldsymbol{\delta}_x \\ \alpha_z\, \boldsymbol{\delta}_\lambda \\ \alpha_z\, \boldsymbol{\delta}_z \end{pmatrix}$$

$$\mu_{k+1} = \frac{1}{n}\left\langle \boldsymbol{x}^{k+1},\, \boldsymbol{z}^{k+1} \right\rangle\,.$$

4. $k := k+1$ e ir al punto **1** verificando el criterio del ciclo.

2.2.1. Encontrar un buen punto inicial. Lo siguiente fue tomado del libro de [Nocedal and Wright, 2006, p. 410] y encuentra un buen punto inicial *(warm starting point)*. La idea es encontrar un punto que este cerca de ser factible.

Sabemos que los problemas

$$\min \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 \quad \text{y} \quad \min \left\|A^\top \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{c}\right\|_2$$

tienen soluciones óptimas, digamos $\boldsymbol{x}^0$ y $\boldsymbol{\lambda}^0$, que podemos encontrar con el algoritmo QR (ver Matemática Computacional). Tomando $\boldsymbol{\lambda}^0$ se define

$$\boldsymbol{z}^0 := \boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{\lambda}^0 \,.$$

Dado que no esta asegurado que $\left(\boldsymbol{x}^0,\, \boldsymbol{z}^0\right) \geq \boldsymbol{0}$ definimos

$$\begin{aligned}
\alpha_x &:= \max\left\{0,\, -\frac{3}{2}\min \boldsymbol{x}^0\right\}\\
\alpha_z &:= \max\left\{0,\, -\frac{3}{2}\min \boldsymbol{z}^0\right\}\\
\boldsymbol{x}^1 &:= \boldsymbol{x}^0 + \alpha_x \mathbb{1}\\
\boldsymbol{z}^1 &:= \boldsymbol{z}^0 + \alpha_z \mathbb{1}
\end{aligned}$$

A veces, se tiene que $\min \boldsymbol{x}^0 = 0$ y entonces $\boldsymbol{x}^1 \not> \boldsymbol{0}$, ya que existe una entrada $x_i^1 = 0$. Para arreglar esto definimos

$$\mu_{aux} := \frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{z}^1 \right\rangle \,, \quad \boldsymbol{x}^2 := \boldsymbol{x}^1 + \frac{\mu_{aux}}{\left\langle \mathbb{1}, \boldsymbol{z}^1 \right\rangle}\mathbb{1} \,, \quad \boldsymbol{z}^2 \; := \boldsymbol{z}^1 + \frac{\mu_{aux}}{\left\langle \mathbb{1}, \boldsymbol{x}^1 \right\rangle}\mathbb{1}.$$

Finalmente, el punto inicial es $\boldsymbol{w}^0 = (\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^2)$.

↑ día 21

Finalizamos las notas presentando el método del elipsoide.

3. El método del elipsoide

El método del elipsoide fue introducido en los 70's por Z. Shor, David B. Judin y Arkadi Nemirovski. Este método fue aplicado a problemas de programación lineal en 1979 por L.G. Khachiyan en el artículo Polynomial algorithms in linear programming. *Como dato curioso este artículo ha subido de 555 citas(consultado en Google) a 760 en menos de dos años.*

> **Resultado Importante:** En 1979 Khachiyan diseñó un algoritmo que explica sin demostrar como problemas de programación lineal se pueden resolver por el método del elipsoide en *tiempo polinomial.* Por lo tanto en términos de complejidad computacional la existencia de tal algoritmo implica que todos los problemas de programación lineal pueden resolverse en tiempo polinomial. Esto es desde entonces los problemas de programación lineal ya no son considerados NP-completos.

Por otro lado en el libro de [Matousek and Gärtner, 2007, p. 106] menciona que el método del elipsoide es lento ya que se comporta, para la mayoría de los problemas, como su peor caso.

Después en 1984, N. Karmarkar publicó el artículo A new polynomial time algorithm for linear programming. *Como dato curioso este artículo ha subido de 6362 citas(consultado en Google) a 7154 en menos de dos años.* Abajo esquematizamos la idea del método del elipsoide y su prueba.

Definición 4.3. Sea $B_1^n(\mathbf{0}) \coloneqq \left\{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leq 1\right\}$ la bola unitaria. Entonces, un elipsoide de dimensión n y volumen *positivo* puede ser escrito como:

$$E \coloneqq \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{y} = M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{x} \in B_1^n(\mathbf{0})\} \,,$$

donde $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica positiva definida y $\boldsymbol{s}$ es su centro.

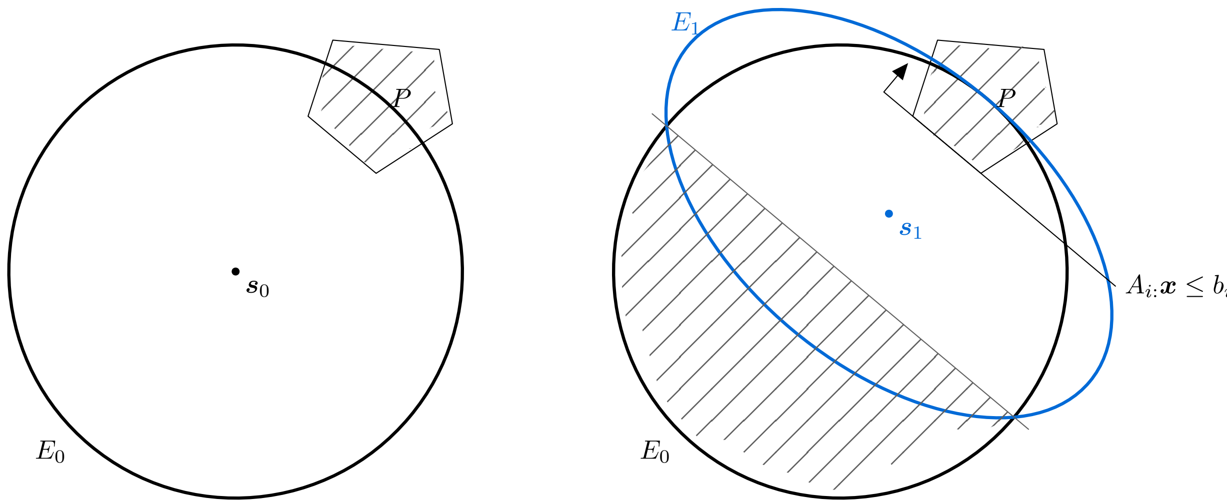
Alternativamente:

$$\begin{aligned} E &= \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon M^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}) \in B_1^n(0)\right\} \\ &= \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s})^\top \underbrace{\left(M^{-1}\right)^\top M^{-1}}_{\coloneqq Q^{-1}} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}) \leq 1\right\} \\ &= \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s})^\top Q^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}) \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

El método tiene como propósito encontrar un punto factible, esto es, un elemento de

$$P \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}\,.$$

Si $P \neq \emptyset$, entonces existe un elipsoide $E_0 \coloneqq B_R^n(\mathbf{0})$ tal que $P \cap E_0 \neq \emptyset$. Empezando de E_0, el método construye una sucesión de elipsoides (de volumen decreciente) $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_\ell$ con la propiedad que $P \cap E_i \neq \emptyset$ para $i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$.



Algoritmo: Método del Elipsoide

Entradas: $E_0 = B_R^n(\mathbf{0})$, $\boldsymbol{s}_0 = \mathbf{0}$ y $\epsilon > 0$. Tenemos $M = RI$ y $Q_0^{-1} = \left(R^2 I\right)^{-1}$.
Salida: $\boldsymbol{s}_\ell \in P$ o $P = \emptyset$ (depende del parámetro $\epsilon > 0$).

Pseudocódigo: Inicie en $k = 0$.

1. Sea $E_k = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_k)\, Q_k^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_k) \leq 1\right\}$.
Si $\boldsymbol{s}_k \in P\ (\iff A\boldsymbol{s}_k \leq \boldsymbol{b})$, entonces STOP y regresa s_k. (ponga $\ell := k$)

2. De otra forma $\exists i$ tal que $\langle A_{i:}, \boldsymbol{s}_k\rangle > b_i$ ($A_{i:}$ es la i-ésima fila de A). De aquí cortemos el semiespacio $\{\boldsymbol{x} \colon A_{i:}\boldsymbol{x} > A_{i:}\boldsymbol{s}_k\}$ y mantenemos la mitad del elipsoide anterior, *i.e.*

$$H_k := E_k \cap \{\boldsymbol{x} \colon A_{i:}\boldsymbol{x} \leq A_{i:}\boldsymbol{s}_k\}\ .$$

Se define E_{k+1} como el elipsoide de menor volumen que contiene a H_k.

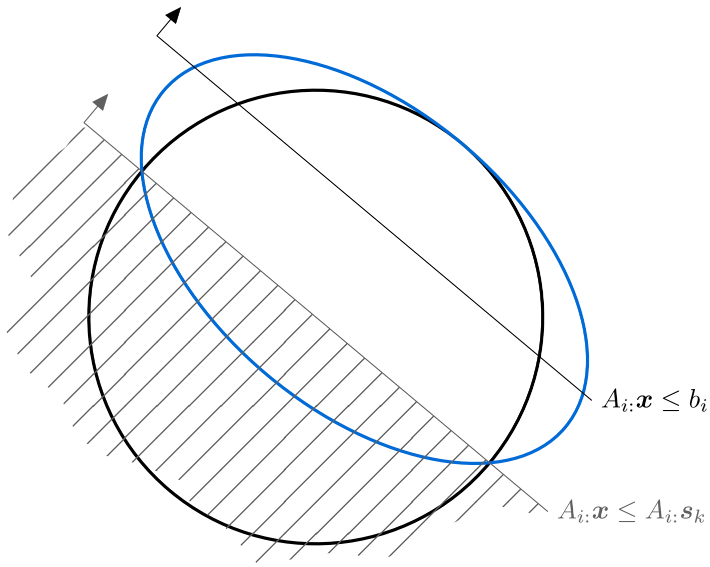
3. Si $\operatorname{Vol}(E_{k+1}) < \epsilon$, entonces STOP con el resultado $P = \emptyset$.
De otra forma, defina $k := k + 1$ y regrese al punto **1**.

Nota 4.1. Sea i tal que $A_{i:}\boldsymbol{s}_k > b_i$, entonces sin pérdida de generalidad $A_{i:} \neq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{h} := \left(A_{i:}^\top\right)$ es un vector normal al hiperplano asociado. Se puede mostrar que el nuevo elipsoide es siempre único y tiene el centro

$$\boldsymbol{s}_{k+1} = \boldsymbol{s}_k - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{Q_k \boldsymbol{h}}{\sqrt{\boldsymbol{h}^\top Q_k \boldsymbol{h}}}$$

y el nuevo mapeo esta dado por

$$Q_{k+1} := \frac{n^2}{n^2 - 1}\left(Q_k - \frac{2}{n+1}\frac{(Q_k\boldsymbol{h})\left(\boldsymbol{h}^\top Q_k\right)}{\boldsymbol{h}^\top Q_k \boldsymbol{h}}\right).$$



Ideas de la prueba:

Uno debe probar que: $\text{Vol}\left(E_{k+1}\right) \leq e^{-\frac{1}{2n+2}} \text{Vol}\left(E_k\right)$.

Usando esta cota tenemos

$$\text{Vol}\left(E_k\right) \leq e^{-\frac{k}{2k+2}} \text{Vol}\left(E_0\right) \leq e^{-\frac{k}{2n+2}} \left(2R\right)^n$$

Queremos que $\text{Vol}\left(E_k\right) < \epsilon$, lo cuál se garantiza si pedimos que

$$e^{-\frac{k}{2k+2}} \left(2R\right)^n < \epsilon = \tilde{\epsilon}^n .$$

La última cota se satisface para

$$k = \left\lceil n\left(2n+2\right) \ln\left(\frac{2R}{\tilde{\epsilon}}\right) \right\rceil .$$

Concluimos que el número de iteraciones es acotado por un polinomio de grado 2 multiplicado por una constante muy GRANDE.

↑ día 22

Capítulo 5

Ejercicios

1. Tareas para modelar

(Los ejercicios de esta tarea son del Dr. Zeferino Parada.)

1. Una fábrica de muebles produce cuatro tipos de escritorios. Cada escritorio se fabrica en dos departamentos, primero en el departamento de Ebanistería y después pasa al departamento de Barnizado. La siguiente tabla describe cuantas horas requiere cada uno de los escritorios en ambos departamentos y el número de horas que pueden emplearse semanalmente.

depa.	Escr. 1	Escr. 2	Escr. 3	Escr. 4	horas disponibles
Ebanistería	4	9	7	10	6000
Barnizado	1	1	3	40	4000

Las ganancias por cada unidad son las siguientes:

	Escr. 1	Escr. 2	Escr. 3	Escr. 4
Ganancia	\$ 12	\$ 20	\$ 18	\$ 40

Suponiendo que se venden todos los escritorios producidos, escriba el modelo de programación lineal que maximice las ganancias de la fábrica.

2. La tabla de precios (en dólares) de un McDonalds es:

articulo	precio
Quarter Pounder w/ Cheese	1.84
Big Mac	1.84
Filet-O-Fish	1.44
McGrilled Chicken	2.29
Fries, small	0.77
Sausage McMuffin	1.29
Lowfat Milk	0.60
Orance Juice	0.72

La tabla de nutrientes de cada producto es:

articulo	Cal	Carbo	Protein	VitA	VitC	Calc	Hierro
Quarter Pounder w/ Cheese	510	34	28	15	16	30	20
Big Mac	500	42	25	6	2	25	20
Filet-O-Fish	370	38	14	2	0	15	10
McGrilled Chicken	400	42	31	8	15	15	8
Fries, small	220	26	3	0	15	0	2
Sausage McMuffin	345	27	15	4	0	20	15
Lowfat Milk	110	12	9	10	4	30	0
Orance Juice	80	20	1	2	120	2	2

La tabla de nutrientes diarios que requiere una persona es:

	Calorías	Careo hidratos	Proteína	VitA	VitC	Calcio	Hierro
n_{min}	2000	350	55	100	100	100	100
n_{max}		375					

Formule el problema de la dieta diaria a costo mínimo comiendo en McDonalds.

3. Préstamo bancario.
Un Banco tiene un fondo de 12 millones de pesos destinado a préstamos. Siendo una institución de banca múltiple, los préstamos se destinan a diferentes productos como indica la tabla:

Préstamo	Interés	Probabilidad de no pagar
Personal	0.140	0.10
Carro	0.130	0.07
Casa	0.120	0.03
Campo	0.125	0.05
Comercio	0.100	0.02

Las políticas de los préstamos son las siguientes:

a) Incumplimiento de pago no genera intereses y se considera dinero perdido. (La probabilidad de no pagar es interpretada como una fracción perdida del préstamo asociado.)

b) Al menos $40\,\%$ del fondo debe ser destinado al campo y al comercio.

c) Para favorecer a la industria de la construcción, el préstamo a casas debe ser al menos el $50\,\%$ de los préstamos personales y de carro.

d) La razón entre la cantidad de incumplimiento de pago y el préstamo total no debe exceder a 0.04 .

Formule el problema de programación lineal que maximice las ganancias del banco.

4. Horarios del trabajo.

Un hospital abrirá nuevas plazas para enfermeras de tiempo completo (8 horas diarias). El número de enfermeras que necesita el hospital se indica en la tabla:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
20	25	18	19	15	12	10

Una cláusula del contrato del trabajo es que una enfermera debe laborar cinco días consecutivas y descansar los otros dos. Formule un problema de programación lineal que minimice el número de enfermeras a contratar. La solución debe cumplir las necesidades del hospital. Además indica que significan las incógnitas.

5. Problema de transporte.

Una fábrica de colchones tiene tres bodegas en la Cuidad de México, una en Tepito, Xochimilco y el Centro. El número de colchones en cada bodega por semana es de: 250 en Tepito, 380 en Xochimilco y 275 en el Centro. La fábrica tiene cuatro clientes importantes en la ciudad: Soriana (200) an Nezahualcoyotl, Gran Sur (240) en Santa Úrsula, Walmart (275) en Cuajimalpa y Gigante (190) en la Villa. Los números en las paréntesis indican la cantidad de colchones vendidos en la semana.

El costo de transporte de un colchón de cada bodega a cada cliente se indica en la siguiente matriz de costos.

	Soriana	Gran Sur	Walmart	Gigante
Tepito	10.50	9.75	11.25	8.15
Xochimilco	9.75	6.50	12.50	14.10
Centro	8.15	10.30	9.60	7.50

Formule el problema de programación lineal que minimice los costos de transporte para la fábrica y que cubra las necesidades de los clientes.

6. Supongamos que tenemos m puntos fijos en $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ y que $\boldsymbol{a}^1 = \mathbf{0}$. Deseamos determinar el centro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y el radio mínimo, $r > 0$, tal que $\boldsymbol{a}^i \in B_r(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, m$, donde $B_r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty \leq r\}$.

Formule un modelo de programación lineal para este problema geométrico.

Para el caso $m = 2$ encuentre el valor de r y las coordenadas del centro $\boldsymbol{x}$.

Pista: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\limits_{j=1,\ldots,n} |x_j|$ y ver el problema *balance del trabajo* del curso.

7. Supongamos que tenemos m puntos fijos en $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ y que $\boldsymbol{a}^1 = \mathbf{0}$. Deseamos determinar el centro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y el radio mínimo, $r > 0$, tal que $\boldsymbol{a}^i \in B_r(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, m$, donde $B_r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1 \leq r\}$.
Formule un modelo de programación lineal para este problema geométrico.
Para el caso $m = 2$ (y $n = 2$) encuentre el valor de r y las coordenadas del centro $\boldsymbol{x}$.
Pista: $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$.
Pista: $\alpha \in \mathbb{R}$ se puede partir en su parte positiva α^+ y negativa α^-.
Use la biyección $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$, $|\alpha| = \alpha^+ + \alpha^-$ y $\alpha^+, \alpha^- \geq 0$.

8. Una aerolínea tiene un vuelo el viernes en la tarde que sale de Ithaca, llega a Newark y finaliza en Boston. Se tienen tres categorías de pasajeros:

a) Clase **Y**: reembolsable

b) Clase **B**: no reembolsable

c) Clase **M**: No reembolsable y compra anticipada de tres semanas

El aeroplano tiene capacidad para treinta pasajeros. Los precios de boletos, en dólares, que se anuncian son:

	Ithaca – Newark	Newark – Boston	Ithaca – Boston
Y	300	160	360
B	220	130	280
M	100	80	140

El número máximo de pasajeros (esperados) en cada vuelo se ha determinado como:

	Ithaca – Newark	Newark – Boston	Ithaca – Boston
Y	4	8	3
B	8	13	10
M	22	20	18

El propósito es maximizar la ganancia de la aerolínea determinando cuántos boletos de los nueve tipos (origen/destino/clase) deben venderse. La aerolínea no debe sobre vender ninguno de los dos vuelos y debe respetar el número máximo de pasajeros, tanto como, los números máximos de pasajeros (esperados) por cada clase en cada vuelo.
Formule el modelo de programación lineal para este problema.

9. La compañía minera Silverado tiene dos minas, **A**, **B**, localizadas en diferentes lugares. Las minas extraen plata de tres calidades diferentes: **Altea, Media y Baja**.
Por cada hora ambas minas extraen las siguientes cantidades (en toneladas):

Mina \Calidad	Alta	Media	Baja
A	0.75	0.25	0.50
B	0.25	0.25	1.50

Silverado tiene un contrato donde debe entregar por semana un mínimo de 36 toneladas de Alta, 24 toneladas de Media y 72 toneladas de Baja calidad. El costo por operar la mina **A** por hora es \$ 50 y para la mina **B** es de \$ 40.
Silverado desea determinar el número de horas a la semana en que las minas deben trabajar para minimizar el costo de operación y cumplir su contrato de entrega semanal.
Formule un problema de programación lineal para la minera Silverado y encuentre a lápiz y papel una solución óptima.

Solución: Mina **A** debe trabajar 24 horas y mina **B** 72 horas. Costo óptimo \$ 4080.

2. Tarea 2

Tareas de geometría, convexidad, direcciones de descenso y resolución gráfica.

Geometría.

1. Demuestra que el conjunto $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ es un polítopo convexo.

2. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 2 \text{ y } x, y \geq 0\}$ es un polítopo convexo. Escribe este conjunto como intersección de semiespacios. ¿El conjunto es acotado?

3. Demuestre que el conjunto $C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ es un polítopo convexo.

Convexidad.

4. Sea C un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\hat{x} \in C$ es un punto extremo de C si y solo si $C \setminus \{\hat{x}\}$ es convexo. *(Pista: Por contradicción)*

5. Pruebe que la intersección finita de convexos en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.
Nota: Este resultado sigue siendo válido si la intersección es infinita numerable.

6. Sea $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\operatorname{Conv}(\mathcal{V}) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0\,,\ i = 1, \ldots, m\,,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

es un conjunto convexo.

7. Dado el problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} && \boldsymbol{x} \in C_F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}\,. \end{aligned}$$

Demuestre que el conjunto $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{x} \text{ es solución (óptima) del problema}\}$ es convexo.

8. Demuestre si el siguiente enunciado es verdadero o falso:
El único vértice de $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ es el vector de ceros.

Direcciones de descenso y construcción de problemas.

9. Demuestre que el problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} && \boldsymbol{x} \in C_F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}\ . \end{aligned}$$

tiene solución óptima $\boldsymbol{x}^\star = \boldsymbol{0}$ ó el problema no es acotado, es decir, $\min_{\boldsymbol{x}\in C_F} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \to -\infty$. *(Pista: Recuerda la definición de una dirección factible de descenso y el lema de dirección de descenso de la clase.)*

10. Dado el problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} && 3x + y \geq 3 \\ & && x + 2y \geq 3 \\ & && x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,. \end{aligned}$$

Construye un vector $\boldsymbol{c}$ tal que el problema

- tiene solución óptima única
- tiene muchas soluciones óptimas
- no tiene solución óptima, es decir, $\min \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \to -\infty$ (no esta acotado).

11. Sea $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} \\ &\text{sujeto a} && \|\boldsymbol{d}\|_1 \leq 1\,. \end{aligned}$$

- Describe el conjunto factible C_F por desigualdades lineales (consejo: dibujarlo).
- construye dos vectores $\boldsymbol{c}$ tal que el problema tiene una solución y muchas soluciones.
- Resuelve el problema gráficamente para un vector $\boldsymbol{c}$ es tal que el problema tiene solución única, pero ese $\boldsymbol{c}$ NO debe ser paralelo a ningún vector canónico.
- Compara el resultado del apartado anterior con el lema de la dirección de mayor descenso (en clase).

12. Dado el problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} && \boldsymbol{x} \in C_F = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\}\ . \end{aligned}$$

- Dibuje C_F .
- construye un vector $\boldsymbol{c} \notin \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_i\}$, $(i = 1, 2, 3)$ talque el problema tenga solución única.
- construye un vector $\boldsymbol{c} \notin \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_i\}$, $(i = 1, 2, 3)$ talque el problema tenga muchas soluciones óptimas.

Resuelve gráficamente.

13.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x_2 + 3x_3 \\ &\text{sujeto a} && x_2 + x_3 = 4 \\ & && x_2 \geq 0\,, \quad x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Resuelve también:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && x_2 + 3x_3 \\ &\text{sujeto a} && \text{las mismas restricciones.} \end{aligned}$$

Ayuda: Aquí una "dirección de Ascenso" (= − "dirección de descenso") es interesante.

14.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x + y + z \\ &\text{sujeto a} && x + 2y + 3z = 10 \\ & && x \geq 1\,, \quad y \geq 2\,, \quad z \geq 1\,. \end{aligned}$$

Ayuda: Elimina una variable usando la igualdad.

15.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && 2x - 3y \\ &\text{sujeto a} && y \leq 2 + x \\ & && y \leq 3 + \frac{1}{2}x \\ & && y - \frac{3}{2} \leq -3(x - 4) \\ & && y \geq -\frac{5}{2} + x \\ & && x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,. \end{aligned}$$

Resuelve también:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && 2x - 3y \\ &\text{sujeto a} && \text{las mismas restricciones.} \end{aligned}$$

3. Tarea 3

Tareas sobre la forma estándar y soluciones básicas (factibles).

1. Transforma el siguiente problema a la forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \min & x+|y| \\ \text{sujeto a} & x+y\leq 7 \\ & x\leq 0\,,\ y\leq 0\,. \end{array}$$

2. Transforma el siguiente problema a la forma estándar. Sea $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & \|\boldsymbol{x}\|_1\leq 1 \end{array}$$

Ayuda: Usa la biyección $x_i=x_i^+-x_i^-$, $|x_i|=x_i^++x_i^-$ y $x_i^+,x_i^-\geq 0$.
Ayuda: Es fácil, verificar tu respuesta para $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^1$.

3. Convierta a nuestro problema estándar (minimizar):

a)

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x+2y+3z \\ \text{sujeto a} & 2\leq x+y\leq 3 \\ & 4\leq x+z\leq 5 \\ & x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ z\leq 0\,. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x+y+z \\ \text{sujeto a} & x+2y+3z=10 \\ & x\geq 1\,,\ y\geq 2\,,\ z\geq 1\,. \end{array}$$

c) convierta y resuelve:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x_1+4x_2+x_3 \\ \text{sujeto a} & 2x_1-2x_2+x_3=4 \\ & x_1-x_3=1 \\ & x_2\geq 0\,,\ x_3\geq 0\,. \end{array}$$

4. *Un problema práctico:*

El tipo de problema que más a menudo se identifica con las aplicaciones de P.L. es el problema de distribuir recursos escasos entre actividades alternativas. Consideramos una fabrica que produce cinco productos diferentes utilizando cuatro tipos de máquinas. Los escasos recursos son los tiempos disponibles en las máquinas y las actividades alternativas son los volúmenes de producción individuales.

Los requisitos de la máquina en horas por unidad se muestran para cada producto de la tabla. Con la excepción del producto 4 que no requiere la máquina 1, cada producto debe pasar a través de las cuatro máquinas. Los beneficios unitarios también se muestran en la tabla:

Tipos de máquina	Cant. de máquinas	Productos				
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Maq. Tipo 1	4	1.2	1.3	0.7	-	0.5
Maq. Tipo 2	5	0.7	2.2	1.6	0.5	1.0
Maq. Tipo 3	3	0.9	0.7	1.3	1.0	0.8
Maq. Tipo 4	7	1.4	2.8	0.5	1.2	0.6
Ganacia $		18	25	10	12	15

Cada máquina funciona 40 horas a la semana. El problema es determinar las cantidades óptimas semanales de producción para los productos. El objetivo es maximizar el beneficio total.

Modelo: Al construir un modelo, el primer paso es definir las variables de decisión:

Sea P_j la cantidad del producto j producido

Termine de Modelar el siguiente problema de Fabrica y determine con `linprog` o `glpk` el valor óptimo y la solución óptima del problema.

Soluciones básicas. A partir del momento que conocen soluciones básicas.

5. Sea $n = 2r$ con $r \in \mathbb{N}$.

- Determine todos los vértices de

$$C_F = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1 - x_2 + \ldots + x_{2k-1} - x_{2k} + \ldots + x_{n-1} - x_n = 1\,,\ x_i \geq 0\ \forall i\}\ .$$

  y las direcciones factibles de un punto $x^\star \in C_F$.
  (Ayuda: ver convexidad y un teorema de los teoremas fundamentales)

- Para un número $r \in \mathbb{N}$, construya dos vectores $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} && \boldsymbol{x} \in C_F \end{aligned}$$

  (i) tiene solución óptima (ii) no tiene solución óptima.

6. Establezca un argumento lógico que determine si los problemas

a)

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 \\ \text{sujeto a} & 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 3x_4 + x_5 = 17 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4\,,\ x_5 \geq 0\,. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{sujeto a} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5 \\ & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4 \geq 0\,. \end{array}$$

tienen solución óptima o no.

Ayuda: piensa en dos columnas linealmente independientes.

Ayuda: Una función acotada tiene valor óptimo.

4. Tareas de las dos Fases

4.1. Simplex (FASE II).

4.1.1. Soluciones básicas factibles.

Sugerencia: Primero escribe el conjunto con restricciones lineales.

1. ¿Cuántos vértices tiene el siguiente conjunto? y ¿Cuáles son?

$$C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq 1 \ , \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\} \ .$$

2. ¿Cuántos vértices tiene el siguiente conjunto? y ¿Cuáles son?

$$C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq 1 \ , \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\} \ .$$

3. Muestre que el problema

$$\begin{aligned} \text{minimiza} \qquad & -x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} \qquad & -3x_1 \leq -5 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

tiene soluciones factibles pero no tiene soluciones factibles que sean vértices.

4.1.2. Problemas de minimizar.

4. Realice todas las iteraciones del Simplex para resolver el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -6x_1 - 8x_2 - 5x_3 - 9x_4 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1 \, , \ x_2 \, , \ x_3 \, , \ x_4 \geq 0 \, . \end{aligned}$$

Solución: $\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_3) = (2, 1)$, valor óptimo -17 .

5. Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -\textstyle\sum_{i=1}^n i\, x_i \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1 \\ & x_1 \, , \ x_2 \, , \ \ldots \, , \ x_n \geq 0 \, . \end{aligned} \tag{5.1}$$

a) Muestre que si escogemos la variable no básica con coeficiente más negativo (ahorro relativo más positivo), el problema (5.1) se resuelve en una iteración.

b) En cambio, muestre que si en el método Simplex usamos la regla de Bland (la primer variable no básica) con coeficiente negativo (ahorro relativo positivo), el problema (5.1) se resuelve en n iteraciones.

6. I) Muestre que una variable básica que se convierte en no básica en una iteración no puede ser variable básica en la siguiente iteración.

II) Por otro lado, dé un ejemplo (un diccionario o tabla) en el cual una variable no básica que se convierte básica puede convertirse en no básica en la siguiente iteración del Simplex.

7. Considere el siguiente diccionario (de un problema que minimiza)

$$\begin{array}{ccrrrr} z & = & -5 & -2x_2 & +2x_3 & -3x_5 \\ \hline x_6 & = & 4 & -2x_2 & -x_3 & +x_5 \\ x_4 & = & 2 & -x_2 & +x_3 & -x_5 \\ x_1 & = & 6 & -x_2 & -2x_3 & -3x_5 \\ \hline 0 & \leq & x_i & & & \end{array}$$

- Liste todos los pares (x_e, x_s) tales que x_e , x_s es variable de entrada, salida.
- Liste todos los pares si el coeficiente más negativo de z se usa como la variable de entrada.
- Liste todos los pares si la regla de Bland se usa para las variables de entrada y de salida.

8. Resuelva el siguiente problema con la regla de Bland.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{sujeto a} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{11}{2}x_2 - \tfrac{5}{2}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ & \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 \leq 0 \\ & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Sugerencia: antes de sumar variables de holgura, multiplique las desigualdades con un número tal que trabajes con coeficientes enteros (al principio). La solución es la trivial.

9. Para el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 \\ \text{sujeto a} \quad & 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 3x_4 + x_5 = 17 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ & x_1\,,\ x_2\,, \ldots,\ x_5 \geq 0\,. \end{aligned}$$

a) Escriba el *tableau* asociado a la SBF $\boldsymbol{x}_B = (x_5, x_3)$, es decir, para $B = \{5, 3\}$.
Ayuda: ver la proposición en clase.

b) Haga un solo paso para llegar a la solución óptima: $\boldsymbol{x}_B = (x_2, x_3) = (2, 1)$ con $z(\boldsymbol{x}^\star) = 4$.

10. Estamos minimizando con el método Simplex y llegamos a la siguiente tabla.

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	1
z	-1	1	2	-1	.	.	3
x_0	-1	1	2	-1	.	1	3
x_5	-4	.	3	-1	1	.	1

Determinamos con la regla de Bland, que x_2 entra a y x_0 sale de la base.

a) Durante ese cambio el método simplex determina una dirección factible de descenso y se va de la SBF $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ a la nueva SBF $(\boldsymbol{x}_{B_+}, \boldsymbol{x}_{N_+})$. ¿Cuál es esa dirección?

b) Más general, se cambia x_s $(s \in B)$ por x_e $(e \in N)$:

		$\boldsymbol{x}_N$	1
$\boldsymbol{x}_B$	$=$	$-H$	$\boldsymbol{h}$
z	$=$	$-\boldsymbol{r}^\top$	α

y la dirección $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ satisface la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{N\setminus\{e\}} \\ x_e \\ \boldsymbol{x}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 0 \\ \boldsymbol{h} \end{pmatrix} + t\boldsymbol{d}\,.$$

Determine $\boldsymbol{d}$ y un intervalo para t en términos de $\boldsymbol{h}, H$.

c) Utilizando el inciso b), resuelve el inciso a) dando el siguiente resultado:
La dirección factible de descenso y el intervalo a que pertenece t .

4.1.3. Construcción de problemas.

11. Decimos que un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ es un *vector estocástico* si y sólo si $\sum_{j=1}^m v_j = 1$ y $v_j \geq 0$ para $j \in \{1 \ldots m\}$. Se dice que una *matriz* A *es estocástica* si y sólo si cada una de sus columnas es un vector estocástico.
Considere el problema de P.L.:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} && A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & && \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz estocástica y $\mathbb{1}^\top = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
Demuestre que si I_m es una submatriz de A y si la primera solución básica es tal que B son los índices de las columnas de I_m. Entonces, el Simplex encuentra la solución óptima en una iteración. ¿Cuál es el valor óptimo?

12. Considere el conjunto $C_F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}\,,$ donde $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene rango completo y $m < n$. Construya un problema de P.L. (diccionario o *tableau*) en el cual la variable x_k no es básica y en la siguiente iteración

a) x_k es variable básica

b) x_k no es acotada superiormente en C_F.

*Ayuda: Empieza con $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y ejercicio **5.***

13. Supongamos que tiene un problema de P.L. en forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} \qquad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

tal que su primer diccionario es no degenerado y al usar el Simplex con cualquier regla para la variable de entrada nunca existe empate en determinar la variable básica que será de salida.

a) ¿Se puede obtener un diccionario degenerado en el proceso? Explique.

b) ¿El proceso del Simplex puede tener ciclos? Explique.

En ambos incisos su argumentación debe estar basada en el Simplex.

4.1.4. Problemas de maximizar.

14. Describe el algoritmo de Fase II del método Simplex para un problema de maximizar.
Sugerencia: Primero construye una tabla inicial.

$$\begin{aligned} &\text{maximiza} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeto a} \qquad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ &\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\, \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

15. Resuelve el siguiente problema con tu algoritmo. Para aplicar tu algoritmo, primero elimina una variable. *(Sugerencia: puedes verificar tu resultado gráficamente.)*

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &\text{sujeto a} \qquad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 7 \\ &\qquad\qquad\qquad x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ &\qquad\qquad\qquad x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

4.1.5. La formula Sherman–Morrison.

16. Demuestre la parte del Lema de Sherman-Morrison que nos hizo falta en clase.

17. Use Sherman-Morrison para deducir una formula para la inversa de la matriz $I + \boldsymbol{u}\boldsymbol{e}_s^\top$. ¿Cuáles son las condiciones a los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_s$ para que esa matriz es regular?

18. *(Opcional) Un truco para implementar el* tableau *y hacer el paso de Gauss-Jordan multiplicando con una sola matriz.* Usando tu resultado del punto anterior, la Fase II puede ser realizada multiplicando con una matriz. Se requieren: el valor α, los vectores $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{r}$ y la matriz H. En este caso $\boldsymbol{u} = \binom{H_{:e}}{r_e} - \boldsymbol{e}_{\tilde{s}}$. Los nuevos valores de $\boldsymbol{h}_+, \boldsymbol{r}_+, \alpha_+, H_+$ se calculan explícitamente usando los valores del paso anterior y la inversa.
Sugerencia: Empiece con

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{h} - H\boldsymbol{x}_N \\ z &= \alpha - \boldsymbol{r}^\top \boldsymbol{x}_N \end{aligned}\right\} \iff I\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H \\ -\boldsymbol{r}^\top \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_N\,,$$

y note que en la izquierda la columna asociada a $\tilde{s}$ cambia.

4.2. Simplex (FASE I).

4.2.1. Fase I (simple, i.e. *con "$\leq$ ").*

19. Determine (usando la Fase I) si el siguiente problema tiene puntos factibles.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Sugerencia: $C_F = \emptyset \iff$ *valor óptimo del problema auxiliar es positivo.*

4.2.2. Fase I (general, i.e. *con "$=$ ").*

En los primeros dos problemas puedes eliminar una variable y verificar gráficamente tu resultado.

20. Determine (usando la Fase I) si el siguiente problema tiene puntos factibles.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Solución: $C_F = \emptyset$.

21. Determine (usando la Fase I) si el siguiente problema tiene puntos factibles.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Solución: $C_F \neq \emptyset$.

22. El problema original sea:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad x_1, x_2, \beta \geq 0\,, \end{aligned}$$

a) Define el problema auxiliar.

b) En la primer SBF se tiene $\boldsymbol{x}_B = (x_3, x_4)$. ¿Para cuáles valores de β, la regla de Bland cambia x_1 por x_3 en el primer paso.

c) Dé valores para α, β tales que el primer cambio con la regla de Bland llega a una SBF óptima con $\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_4) > (0,0)$. ¿Qué implica eso para C_F del problema original?
Sugerencia: Empiece con el cambio $x_1 \leftrightarrow x_3$ del inciso anterior.

d) Encuentre valores para α, β tal que la(s) solución(es) óptimas del programa auxiliar son del tipo $(x_1^\star, x_2^\star, 0, 0)$, es decir, $\boldsymbol{x}_N = (x_3, x_4)$.
Sugerencia: El cambio $x_1 \leftrightarrow x_3$ del inciso anterior no llega a una tabla óptima.

4.3. Combinación de las fases.

23. Sea el problema de minimización:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 9 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{aligned}$$

a) Resuelva el problema por el método de las dos fases.

b) Identifique A_B^{-1} en el *tableau* óptimo.

5. Tareas de dualidad: Problemas duales

Aviso: Cuando se deduce el problema dual se debe llegar a la mínima expresión algebraica.

1. El problema canónico de programación lineal es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\,. \end{array}$$

es equivalente al problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z \\ \text{sujeto a} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - z = 0 \\ & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\,. \end{array}$$

Demuestre (con la definición del dual simétrico) que el dual del último problema es

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}\,. \end{array}$$

2. Para el problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & cx \\ \text{sujeto a} & a \le x \le b\,, \end{array}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son números fijos tales que $a \le b$, encuentre

a) el problema dual.

b) una solución óptima $x^\star$, del problema primal.

3. Supongamos que el conjunto factible del problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

coincide con el de su dual.

a) ¿Cuáles propiedades deben tener la matriz A y los vectores $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$?

b) ¿Cuál es el valor óptimo de la función objetivo $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^\star$, si $\boldsymbol{x}^\star$ es solución óptima?

c) ¿Siempre existe una solución óptima?

4. Encuentre el dual de

a)
$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & \boldsymbol{b}_\ell \leq A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_u \\ & \ell \leq x_i \leq u\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z \\ \text{sujeto a} & z - \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{x} \leq 0\,,\ j = 1, 2, \cdots, m \\ & \mathbb{1}^\top \boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

donde $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^n\,,\ j = 1, 2, \ldots, m$ y $\mathbb{1}^\top = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n\,.$

d)
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & |x_1| \leq 4,\ x_3 \geq 0\,. \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & -2x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 \geq 0\,. \end{array}$$

5. Sensibilidad 1. Supongamos que el problema
$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$
tiene solución óptima.

Demuestre que para cualquier $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$, el problema
$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} \leq \tilde{\boldsymbol{b}} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$
tiene conjunto factible vació o solución óptima.

6. Tareas de dualidad: Sensibilidad

Los siguientes ejercicios compuestos nos fueron proporcionados por la Dra. Marta Cabo. Versiones alternativas (en Inglés) de *Wyndor Glass* y de la compañía de jugetes *TOYCO* también se encuentran en el internet.

1. *La compañía de juguetes TOYCO* utiliza 3 operaciones para armar camiones, trenes y carros de juguete. Para ejecutar la operación 1 se requieren de a lo más 430 minutos al día, la operación 2 de a lo más 460 y la operación 3 de a lo más 420 minutos al día.

Para ensamblar:

- Un camión se requiere de: 1 minuto de la operación 1, 3 minutos de la operación 2 y 1 minuto de la operación 3 .
- Un carro requiere de: 2 minutos de la operación 1, 0 minutos de la operación 2 y 3 minutos de la operación 3.
- Un tren requiere de: 1 minuto de la operación 1, 2 minutos de la operación 2 y 0 minutos de la operación 3.

Los ingresos por unidad de camión, carro y tren de juguete son de: $\$\,3$, $\$\,2$, $\$\,5$ respectivamente. Debido a que existe un contrato, TOYCO debe hacer al menos 80 carros al día. Si x_1, x_2, x_3 son el número de camiones, carros y trenes que se pueden hacer por día. La compañía necesita decidir la producción diaria con el fin de maximizar sus ganacias.

a) Modela el problema de programación lineal.

b) Utilizando variables de holgura, resuelve el problema por el método de las dos fases, aplicando la regla de mayor descenso. Obten la tabla óptima.

c) ¿Cuál es la solución y el valor óptimo?

d) ¿Qué tan bajo tendría que ir la ganacia por coche para cambiar la solución óptima?

e) Si la gancia por tren se reduce a $\$\,4$, ¿Cuál sería el efecto sobre la solución óptima? ¿Cuál sería el efecto en la gancia?

f) Si la empresa aumenta el tiempo de la operación 3 a 450 minutos? Cuántos y cuáles juguetes se fabricarían con este nuevo escenario? ¿Cómo afectaría a la ganancia esta reducción?

2. *La compañía Wyndor Glass* produce artículos de vidrio, entre ellos ventanas y puertas. Cada artículo se fabrica en tres plantas. Los marcos y molduras de aluminio se hacen en la planta 1, los marcos y molduras de madera se hacen en la planta 2, después pasan por la planta 3, donde se produce el vidrio y se ensamblan los productos.

Debido a una reducción de las ganancias, la administración ha decidido reorganizar la línea de producción de la compañía. Se descontinuarán varios productos no rentables y se dejará libre una parte de la capacidad de producción para emprender la fabricación de dos nuevos productos cuyas ventas potenciales son muy prometedoras:

- **Producto 1:** Una puerta de vidrio de 8 pies con un marco de alumnio.
- **Producto 2:** Una ventana corrediza con marco de madera de 4 por 6 pies.

El equipo de investigación de operaciones identificó los datos que necesitaban reunir:

a) Número de horas de producción disponibles por semana en cada planta para fabricar estos nuevos productos.

b) Número de horas de fabricación que se emplea para producir cada lote de cada artículo nuevo en cada una de las plantas.

c) La ganancia por lote de cada producto nuevo.

La siguiente tabla describe cuantas horas requiere cada uno de los productos en ambas plantas y el número de horas que a lo más estan disponibles para emplearse semanalmente.

	Tiempo de Producción		
Planta	Prod. 1	Prod. 2	horas disponibles (semana)
Planta 1	1	0	4
Planta 2	0	2	12
Planta 3	3	2	18

Las ganancias por cada unidad de producto son las siguientes:

	Prod. 1	Prod. 2
Ganancia	$ 3000	$ 5000

a) Suponiendo que se vende todo lo que se produce, escriba el modelo de programación lineal que maximice las ganancias de la fábrica.

b) Resuelva el problema de programación lineal descrito anteriormente (por la regla de Bland).

c) Una vez que se obtuvo la producción óptima de ambos productos, la gerencia de las plantas 1 y 3 están pensando en ofrecer 2 y 3 horas más semanales, respectivamente para la fabricación de los nuevos productos. ¿En cuanto aumentarían las ganacias con este nuevo esquema?

3. *Compañía de relojes.* David, Diana y Lidia son los únicos socios y empleados de una compañía que produce relojes finos. David y Diana pueden trabajar un máximo de 40 horas semanales, mientras que Lidia sólo puede trabajar hasta las 20 horas por semana.

La empresa hace dos tipos de relojes: el reloj de pedestal y el de pared. Para hacer un reloj, David (ingeniero mecánico) ensambla las partes internas, y Diana (ebanista) produce las cajas de madera labradas a mano. Lidia es responsable de recibir pedidos y enviar los relojes. El tiempo que se requiere para cada tarea se muestra en la tabla:

Tarea	Tiempo requerido Reloj de pedestal	 Reloj de pared
Ensamblar mecanismo del reloj	6 horas	4 horas
Tallar la cubierta de madera	8 horas	4 horas
Envío	3 horas	3 horas

Cada reloj de pedestal construido y enviado deja una ganancia de \$300, mientras que cada reloj de pared proporciona una ganancia de \$200. Los tres socios desean determinar cuántos relojes de cada tipo deben producir por semana para maximizar la ganancia total.

a) Formule un modelo de programación lineal para resolver este problema

b) Resuelva dicho problema utilizando el método gráfico.

c) Utilice la gráfica para determinar si la solución óptima cambia cuando la estimación de la ganancia unitarios por reloj de pedestal se incrementa de \$300 a \$375 (sin otro cambio en el modelo). Después verifique si la solución óptima se modificaría si, además de este cambio en la ganancia unitaria del reloj de pedestal, la ganancia unitaria estimada de los relojes de pared también cambia de \$200 a \$175.

d) Utilizando la información sobre los ahorros relativos, ¿Cuánto puede variar la ganancia de los relojes de pedestal antes de que cambie la solución óptima? ¿Cuánto puede variar la ganancia de los relojes de pared antes de que cambie la solución óptima?

e) Determine el efecto sobre la solución óptima y la ganancia total si cada uno de los tres socios, de manera independiente, aumenta en 5 el número máximo de horas disponibles por semana para trabajar.

f) Un socio puede trabajar menos sin afectar a la solución óptima ni la ganancia óptima. ¿Quien es? y ¿Cuál es el rango permisible para que el máximo número de sus horas disponibles conserve la solución óptima?

g) Genere de forma sistemática la solución óptima y la ganancia total cuando el único cambio es que el número máximo de horas disponibles por semana para trabajar de David cambia a cada uno de los siguientes valores: 35, 37, 39, 41, 43, 45. Después haga lo mismo cuando el único cambio es que los números de Diana cambian de la misma forma. Por último, repita el ejercicio cuando el único cambio es que el número máximo de horas disponibles por semana para trabajar de Lidia cambia a cada uno de los siguientes valores: 15, 17, 19, 21, 23, 25.

h) Escriba el problema dual asociado explicando claramente el significado de variables y restricciones.

i) Explique el significado de que los precios sintéticos (sombra) sean igual a cero.
¿Qué quiere decir para este problema en particular?

j) ¿Es válido usar los precios sombra que se proporcionaron en el informe de sensibilidad (ver apartado **3.***e*) para determinar el efecto si Lidia cambiara su máximo de horas semanales de 20 a 25? Si es así, ¿cuál sería el incremento de la ganancia total?
¿Y si adicionalmente David reduce su máximo de horas semanales de 40 a 35?

Opcionales e interesantes: Los programas AMPL y GLPK (en Octave) tambien permiten hacer el análisis de sensibilidad.

k) Implementa el problema (AMPL u Octave) y encuentra los valores de los costes reducidos de las variables. ¿Cómo puedes usar esta información para justificar los resultados del apartado **3.***c*?

l) Para aumentar la ganancia total, los tres socios acordaron que uno de ellos aumentaría un poco el número máximo de horas de trabajo por semana. La elección se basa en quién aumentaría más la ganancia total. Extraiga la información necesaria con comandos en AMPL (u Octave).

7. Tareas de dualidad: Algoritmos

1. Resuelve el siguiente problema con el algoritmo Simplex Dual:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

2. Dado el siguiente problema de Programación Lineal.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 26x_1 + 7x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \geq 30 \\ & 5x_1 + 2x_2 \geq 23 \\ & 3x_1 + 5x_2 \geq 29 \\ & x_1\,,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Realice todas las iteraciones del método Simplex-Dual para resolverlo.

3. Construye un problema de minimización con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ cuyo dual es no acotado. Después, resuelve su problema con el algoritmo Simplex Dual.

4. Resuelve el siguiente problema con el algoritmo Primal-Dual:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

5. Construye un problema de minimización con $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ y restricciones del tipo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ cuyo dual no es acotado. Después, resuelve su problema con el algoritmo Primal-Dual.

8. Tareas de Puntos interiores

Recuerde: El conjunto de puntos interiores que son primal-dual factibles es:

$$\Omega^\circ := \Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{n+m+n}\colon A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\,,\ A^\top\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c}\,,\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})>\boldsymbol{0}\Big\}$$

1. Este ejercicio ilustra que $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0}$ es necesario para que soluciones de

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b} \\ A^\top\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{z}-\boldsymbol{c} \\ XZ\mathbb{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,,\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0}\,. \tag{5.2}$$

resuelven el problema primal y dual.

Dado el problema (primal)

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1 \\ \text{sujeto a} & x_1+x_2=1 \\ & x_1,x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Muestre que la solución primal-dual $(\boldsymbol{x}^\star,\lambda^\star,\boldsymbol{z}^\star)$ esta dado por

$$\boldsymbol{x}^\star = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \lambda^\star = 0\ ,\quad \boldsymbol{z}^\star = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

b) Después, verifique que el sistema $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}$ tiene la solución

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \lambda = 1\ ,\quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ .$$

y que esa solución no es dual factible para el sistema (5.2).

¿Puede ser una solución óptima? Justifique.

2. Suponga que conocemos un punto interior $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{z}) \in \Omega^\circ$. El siguiente método de Newton (para seguir la trayectoria central) determina una dirección $(\boldsymbol{d}_x,\boldsymbol{d}_\lambda,\boldsymbol{d}_z)$ tal que

$$\begin{pmatrix} A & . & . \\ . & A^\top & I \\ Z & . & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_x \\ \boldsymbol{d}_\lambda \\ \boldsymbol{d}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ -XZ\mathbb{1}+\sigma\mu\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \mu := \frac{1}{n}\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{z}$$

y define para un $\alpha \in (0,1]$ el nuevo punto

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{z}) + \alpha(\boldsymbol{d}_x,\boldsymbol{d}_\lambda,\boldsymbol{d}_z) \in \Omega^\circ\,.$$

Demuestre:

a) $\boldsymbol{d}_x^\top\boldsymbol{d}_z = 0\,.$

b) $0 \leq \sigma < 1 \implies (\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{d}_x)^\top(\boldsymbol{z}+\alpha\boldsymbol{d}_z) < \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{z}\,.$

Sugerencia: primero calcula $(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{d}_x)_i(\boldsymbol{z}+\alpha\boldsymbol{d}_z)_i$, después usa inciso a).

3. En la clase, definimos la trayectoria central (*central path*) como

$$\mathcal{T}_c := \Big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}) \in \Omega^\circ : x_i z_i = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \,, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \Big\} .$$

donde $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) := \frac{1}{n} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z}$ es la medida de complementaridad (*duality measure*) que depende de cada punto.

Definimos los siguientes vecindades de esa trayectoria:

$$\mathcal{N}_2(\theta) := \Big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}) \in \Omega^\circ : \ \| XZ\mathbb{1} - \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\mathbb{1} \|_2 \leq \theta \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \Big\} \quad \text{donde} \quad \theta \in [0, 1) \,,$$

$$\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma) := \Big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}) \in \Omega^\circ : x_i z_i \geq \gamma \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \,, \ i = 1, \ldots, n \Big\} \qquad \text{donde} \quad \gamma \in (0, 1] \,,$$

Recuerde: $X = \operatorname{diag}(\boldsymbol{x})$, $Z = \operatorname{diag}(\boldsymbol{z})$.

a) Demuestre $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 1 \implies \mathcal{N}_2(\theta_1) \subseteq \mathcal{N}_2(\theta_2)$.

b) Demuestre $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 1 \implies \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma_2) \subseteq \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma_1)$.

c) Demuestre $\gamma \leq 1 - \theta \implies \mathcal{N}_2(\theta) \subseteq \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$.

d) Demuestre que $\mathcal{N}_2(0) = \mathcal{N}_{-\infty}(1) = \mathcal{T}_c$, es decir, los dos conjuntos coinciden con la trayectoria central.

e) Dado un punto $\boldsymbol{w} := (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}) \in \Omega^\circ$ encuentre el intervalo para γ tal que $\boldsymbol{w} \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$.

f) Para $n = 2$, encuentra un punto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) > \mathbf{0}$ que viola la condición

$$\| XZ\mathbb{1} - \mu\mathbb{1} \|_2 \leq \theta\mu \quad \text{para cada} \quad \theta \in [0, 1) \,.$$

Índice alfabético

Ahorro relativo, 49
Algoritmo
  Fase I (general), 71
  Primal-Dual, 108
  Primal-Dual para Puntos Interiores, 131
  Fase I, 65
  Fase II, 52
  Fase II revisado, 61
  Simplex Dual, 100

clase
  día 01, 11
  día 02, 17
  día 03, 23
  día 04, 31
  día 05, 40
  día 06, 45
  día 07, 53
  día 08, 61
  día 09, 68
  día 10, 73
  día 11, 84
  día 12, 91
  día 13, 96
  día 14, 102
  día 15, 106
  día 16, 109
  día 17, 114
  día 18, 118
  día 19, 123
  día 20, 128
  día 21, 132
  día 22, 135
Condiciones de KKT, 126
Conjunto
  Convexo, 24

Dirección
  de descenso, 29
  factible, 29

Función cóncava, 26
Función convexa, 26

Hiperplano, 20

Lema
  Dualidad débil, 86
  Dualidad fuerte, 86
  Farkas, 122
  Farkas 2^a versión, 123
  Sherman–Morrison, 62

Polítopo convexo, 25
Poliedro convexo, 25
Problema
  Dieta, 12
  Ajuste de datos, 21
  Balance de Trabajo, 14
  Colocación de recursos, 15
  De clasificación, 22
  Fabrica, 13
  Mezclas, 9
  Transporte, 16
Problema de P.L.
  Degenerado, 56
  Dual, 81
  Primal, 81
  Definición, 6
  Estándar, 33
  No acotado, 57
  No-degenerado, 59
  Representación Matricial, 12
Punto extremo, 24
Punto Interior, 125

Regla
  Bland, 58
  Mayor descenso, 58

Semiespacio, 20
Solución
  óptima, 26
  Básica, 39
  Básica factible, 39
  Básica factible degenerada, 39
  Factible, 39
  global, 26
  local, 26

Tableau, 50
  Degenerado, 59
  No-degenerado, 59
Teorema
  Fundamental de P.L., 41
  Complementaridad asimétrica, 98
  Dualidad de P.L., 87
  Método Simplex termina, 59
Trayectoria Central, 129

Variable
  Básica, 39
  Dual, 81
  Primal, 81

Bibliografía

Mokhtar S Bazaraa, John J Jarvis, and Hanif D Sherali. *Linear programming and network flows.* John Wiley, 2011.

R. G. Bland. New finite pivoting rules for the simplex method. 2:601–608, 1977.

Michael C. Ferris, Olvi L. Mangasarian, and Stephen J. Wright. *Linear Programming with MatLab.* SIAM, 2007.

J. A. J. Hall and K. I. M. McKinnon. The simplest examples where the simplex method cycles and conditions where expand fails to prevent cycling. *ArXiv Mathematics e-prints*, 2000.

David G. Luenberger and Yinyu Ye. *Linear and Nonlinear Programming.* Springer, 2008.

Jiri Matousek and Bernd Gärtner. *Understanding and Using Linear Programming.* Springer, 2007.

Jorge Nocedal and Stephen Wright. *Numerical optimization.* Springer Science & Business Media, 2006.

H Paul Williams. *Model building in mathematical programming.* John Wiley, 2013.