Cálculo de la función exponencial de una matriz

Rafael Morones E.
Dept. de Matemáticas, ITAM

22 de marzo de 2012

1. Introducción.

Originalmente este texto estaba concebido para obtener la solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, determinando la función exponencial matricial de la matriz A vía el cálculo de su forma canónica de Jordan. Sin embargo, una cita del texto de L. Perko [4] indicaba la existencia de un método opcional desarrollado por E. J. Putzer [5] y, por otra parte, algunos métodos adicionales para casos especiales citados en los problemas del texto de Arrowsmith y Place [1] en los que se hace uso intensivo del teorema de Cayley-Hamilton. Esas notas también estaban restringidas a matrices de tamaño $[2 \times 2]$. Esta restricción implica la exclusión de problemas donde se puedan usar vectores propios generalizados para calcular la matriz M de transformación por similaridad. Estas cuestiones se ilustran con algunos ejemplos y se hace referencia a los apéndices para una demostración del teorema de Cayley-Hamilton y a una breve exposición sobre vectores propios generalizados.

Estas notas no son exhaustivas y, en consecuencia, se recomienda al lector acudir a las referencias que se citan en la bibliografía.

2. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Sea el problema de valores iniciales

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1a}$$
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \tag{1b}$$

donde

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.
- $A : [n \times n]$ una matriz real tal que $\det A \neq 0$.
- $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0}, \ldots x_{n,0}]$ un vector de condiciones iniciales tal que $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$.

Se define a continuación la función *exponencial matricial* como una serie de potencias [1][4]

Definición 1 *Sea P una matriz real de tamaño $[n \times n]$, entonces*

$$\exp(P) = e^P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k}{k!} \tag{2}$$

Esto es

$$e^P = I + P + \frac{1}{2!}P^2 + \ldots + \frac{1}{n!}P^n + \ldots$$

Una consecuencia de esta esta definición es que e^P es una matriz de $[n \times n]$. Se demuestra [4] que esta función es absoluta y uniformemente convergente respecto a la norma

$$||T|| = \max_{|\mathbf{x}| \leq 1} |T(\mathbf{x})|$$

donde

- T es un operador lineal
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
y si T está representado por una matriz A (de tamaño $n \times n$) entonces
$$||A|| = \sqrt{n}\,l, \quad l : \text{longitud máxima de los renglones de } A.$$
- $|\mathbf{x}|$ es la norma euclidiana de un vector en $\mathbb{R}^n$.

Entre las propiedades más interesantes de esta función se tienen:

- Para dos matrices del mismo tamaño P y Q tales que $PQ = QP$
$$e^P e^Q = e^{P+Q} \tag{3a}$$
y de donde se deduce que si $Q = -P$
- $e^{P+(-P)} = I$, ecuación que implica
$$e^{-P} = \left(e^P\right)^{-1} \tag{3b}$$
que define a la inversa de una función exponencial matricial.
- Dada la convergencia absoluta y uniforme de la serie, esta se puede derivar e integrar término a término y las series resultantes también gozan de estos tipos de convergencia. En particular, si $P = At$ se tiene
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A \tag{3c}$$

Con estos antecedentas es posible demostrar el siguiente

Teorema 1 *Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (1a), sujeto a las condiciones iniciales (1b), entonces su solución está dada por*

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 \tag{4}$$

Demostración.
Derivando la serie que define e^{-At}, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-At}\mathbf{x} &= e^{-At}\dot{\mathbf{x}} - e^{-At}A\mathbf{x} \\ &= e^{-At}\left(\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Resultado que implica que

$$e^{-At}\mathbf{x} = \mathbf{C}$$

El vector constante $\mathbf{C}$ se obtiene de las condicones iniciales (1b)

$$e^{-At_0}\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}$$

Por lo que se tiene finalmente

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0$$

$\ldots\square$

Observación. De este resultado se define, para un sistema lineal, el operador de evolución o flujo de un punto $\mathbf{x}$ el cuál inicialmente ($t = t_0$) ocupaba la posición $\mathbf{x}_0$, como

$$\mathbf{x}(t) = \phi_{t-t_0}(\mathbf{x}_0)$$

2.1. Algunos ejemplos.

Los siguientes ejemplos corresponden a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en $\mathbb{R}^2$ y representan tres clases de problemas cuya solución es especialmente sencilla de obtener. Este no es el caso general, sin embargo, en la siguiente sección se establecen las condiciones para reducir un problema complejo en uno más simple.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{5a}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}, \quad x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 \neq 0 \tag{5b}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5c}$$

Solución.

Un sistema como este se dice que está desacoplado. Su solución es inmediata

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \end{pmatrix}$$

Y las constantes de integración son

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,0}e^{-t_0} \\ x_{2,0}e^{-t_0} \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución bajo esta restricción es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{1,0}e^{t-t_0} \\ x_{2,0}e^{t-t_0} \end{pmatrix} \\ &= e^{t-t_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Claramente

$$\phi_{t-t_0}(\mathbf{x}_0) = e^{t-t_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}_0$$

$\ldots\diamond$

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{6a}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}, \quad x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 \neq 0 \tag{6b}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6c}$$

Solución.

En este caso el sistema está parcialmente acoplado. La solución comienza resolviendo la segunda ecuación de (6a), esto es

$$x_2 = c_2 e^{-t}$$

La sustitución de este resultado en la primera ecuación, deviene en

$$\dot{x}_1 + x_1 = c_2 e^{-t}$$

la que es una ecuación diferencial de primer orden, lineal. El factor integrante requerido para obtener su solución es $\mu(t) = e^t$, por lo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^t x_1\right) = c_2$$

y

$$x_1 = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$

La solución del sistema en forma matricial es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Las constantes se obtienen, una vez más de las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t_0} & 2t_0 e^{-t_0} \\ 0 & e^{-t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Esto es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-t_0} & 2t_0 e^{-t_0} \\ 0 & e^{-t_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \\ &= e^{t_0} \begin{pmatrix} 1 & -2t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución del sistema con estas condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= e^{-(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \\ &= e^{-(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & 2(t-t_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En este caso el operador de evolución es

$$\phi_{t-t_0}(\mathbf{x}_0) = e^{-(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & 2(t-t_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0$$

3. Formas canónicas de Jordan.

Los ejemplos de la sección anterior son suficientemente sencillos para obtener una solución casi inmediata. En general la matriz A no tiene la estructura diagonal que tienen los ejemplos sino que es una matriz con n^2 entradas distintas de cero. Es deseable obtener una transformación de coordenadas que reduzca esa matriz a una de forma diagonal o triangular superior (o inferior). Entonces, sea el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{7}$$

donde

$\mathbf{x}$ un vector en $\mathbb{R}^n$ referido a la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n\}$.

A una matriz real de tamaño $[n \times n]$ y tal que $\det A \neq 0$.

y sea la transformación de coordenadas

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} y_j$$

o en forma matricial

$$\mathbf{x} = M\mathbf{y} \tag{8}$$

donde M es una matriz no singular, esto es, invertible y tal que el sistema original (7) se reduzca a uno equivalente

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y}, \quad \text{donde} \quad y = y(t) \tag{9}$$

más sencillo de integrar. Si existe esta matriz M, se tiene de (8) que

$$\dot{\mathbf{x}} = M\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{x} = AM\mathbf{y}$$

de donde

$$\dot{\mathbf{y}} = M^{-1}AM\mathbf{y} \tag{10}$$

Esta ecuación define J como

$$J = M^{-1}AM$$

Las matrices definidas de esta manera se dice que[1, 2] son *similares o semejantes.*

Bajo la hipótesis de la existencia de tal matriz M se tiene que la solución del sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y}$$

está dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{Jt}\mathbf{y}_0$$

y en consecuencia, de la ecuación (8)

$$M^{-1}\dot{\mathbf{x}} = e^{Jt}M^{-1}\mathbf{x}_0$$

esto es

$$\dot{\mathbf{x}} = Me^{Jt}M^{-1}\mathbf{x}_0$$

de donde se deduce

$$e^{At} = Me^{Jt}M^{-1} \tag{11}$$

En el siguiente teorema se demuestra la existencia de la matriz M para el caso de vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 2 *Sea $A : [2 \times 2]$ una matriz real, existe entonces una matriz no singular M tal que*

$$J = M^{-1}AM$$

corresponde a uno de los siguientes tipos

a)
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2$$

b1)
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

b2)
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

c)
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

La matriz J dada por uno estos tipos se dice que es una forma canónica de Jordan *para la matriz A.*

Demostración.
Los valores propios de la matriz A (iguales que los de J) se obtienen del poliniomio característico

$$P(\lambda) = \lambda^2 - I\lambda + II = 0 \tag{12}$$

donde $I = \mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22}$, $II = \det A$, y los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(I + \sqrt{\Delta}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(I - \sqrt{\Delta}\right) \tag{13}$$

donde $\Delta = I^2 - 4II$, es el discriminante de la forma cuadrática. Se tienen los casos

a) $\lambda_1 > \lambda_2$. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ los vectores propios asociados a λ_1, λ_2 respectivamente, esto es

$$A\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u} \quad \text{y} \quad A\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}$$

dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes. La matriz M se construye con estos vectores de la manera siguiente

$$M = [\mathbf{u} \vdots \mathbf{v}]$$

Dado que $J = M^{-1}AM$ implica $AM = MJ$, se tiene que

$$\begin{aligned} AM &= A[\mathbf{u} \vdots \mathbf{v}] \\ &= [A\mathbf{u} \vdots A\mathbf{v}] \\ &= [\lambda_1\mathbf{u} \vdots \lambda_2\mathbf{v}] \\ &= M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esto demuestra este inciso.

b1) La matriz A es diagonal, esto es

$$A = \lambda_0 I = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en consecuencia cualquier matriz M no singular resuelve el problema y en este caso $J = A$.

b2) La matriz A no es diagonal y sus valores propios son iguales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$). En este caso sólo se tiene un vector propio $\mathbf{u}$, lo que implica que la multiplicidad geométrica (1: un sólo subespacio invariante generado por $\mathbf{u}$) es menor que la multiplicidad algebraica (2). Para construir otro vector propio ($\mathbf{v}$) linealmente independiente de $\mathbf{u}$ se hace uso de la teoría de vectores propios generalizados. Entonces, si $\mathbf{v}$ es tal vector propio, satisface entonces

$$(A - \lambda_0 I)\mathbf{v} = \mathbf{u}$$

de donde se deduce

$$A\mathbf{v} = \mathbf{u} + \lambda_0 \mathbf{v}$$

La matriz $M = [\mathbf{u} \vdots \mathbf{v}]$ satisface ahora

$$\begin{aligned} AM &= A[\mathbf{u} \vdots \mathbf{v}] \\ &= [A\mathbf{u} \vdots A\mathbf{v}] \\ &= [\lambda_0 \mathbf{u} \vdots \mathbf{u} + \lambda_0 \mathbf{v}] \\ &= [\mathbf{u} \vdots \mathbf{v}] \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \\ &= MJ. \end{aligned}$$

Esto demuestra el inciso b).

c) En este caso $\Delta < 0$ y se tienen raices complejas. Los valores propios son $\lambda_{1,2} = a \pm b\imath$, $b > 0$ y $a \in \mathbb{R}$.

Demostración.
Sea el vector propio $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \imath\mathbf{w}$ asociado a λ_1. Del lema (1) en el apéndice B, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes y se propone

$$M = [\mathbf{w} \vdots \mathbf{v}]$$

una matriz no singular. Se requiere demostrar que

$$J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Se van a calcular la primera y segunda columnas de $M^{-1}AM$, para esto, si $\mathbf{e}_1 = [1, 0]^T$ y $\mathbf{e}_2 = [0, 1]^T$ son lo vectores de la base canónica en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M\mathbf{e}_1 &= [\mathbf{w} \vdots \mathbf{v}] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{w} \\ M\mathbf{e}_2 &= [\mathbf{w} \vdots \mathbf{v}] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \end{aligned}$$

Y dado que M es invertible

$$\mathbf{e}_1 = M^{-1}\mathbf{w}, \quad \mathbf{e}_2 = M^{-1}\mathbf{v}$$

Entonces, para la primera columna

$$\begin{aligned} M^{-1}AM\mathbf{e}_1 &= M^{-1}A\mathbf{w} \\ &= M^{-1}(\beta\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}) \\ &= \beta M^{-1}\mathbf{e}_2 + \alpha M^{-1}\mathbf{w} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un procedimiento similar demuestra que la segunda columna de $M^{-1}AM$ está dada por

$$M^{-1}AM\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

quedando demostrado el teorema.

$\ldots \square$

3.1. Formas canónicas de Jordan en $\mathbb{R}^3$.

Las formas canónicas de Jordan para una matriz real $A : [3 \times 3]$ también tienen estructuras sencillas ya que aún no se presenta la posibilidad de raices complejas de multiplicidad mayor que 1. Estas se enlistan a continuación

a) A tiene 3 valores propios distintos $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

b) A tiene tres raices reales, una de las cuáles es de multiplicadad 2

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

c) A tiene una raíz real de multiplicidad 3

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

d) A tiene una raíz real y dos raices conjugadas complejas

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de formas canónicas de Jordan de orden superior, en el texto[4] se presenta un método basado en el índice de deficiencia de cada uno de los valores propios asociados a la matriz A. El lector interesado puede consultarlo en el capítulo 1 de esta referencia.

3.1.1. Algunos ejemplos.

Se presentan dos ejemplos del cálculo de la matriz e^{At} para el caso de una matriz $A : [3 \times 3]$ con valores propios distintos y uno para el caso de una con valores propios repetidos, usando la matriz canónica de Jordan respectiva. Este procedimiento se contrasta con los métodos directos para el cálculo de e^{At} que se discuten en la siguiente sección.

Valores propios distintos. Sea la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 5 = 0 \tag{15a}$$

con valores propios, ordenados en sentido creciente

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -5 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 1 \tag{15b}$$

Dado que los valores propios son todos distintos, la forma canónica de Jordan asociada es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

forma canónica que corresponde al orden de los valores propios que se escogió en (15a). En este caso la función exponencial matricial es inmediata

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \tag{16}$$

El cálculo de e^{At} es un poco más laborioso ya que requiere de la construcción de la matriz M y el cálculo de su inversa M^{-1}. Ya se discutió que la primera columna de M es el vector propio asociado a λ_1:

$$(A - 1I \vdots 0) = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & \vdots 0 \\ 3 & -9 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & 12 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene que $\mathbf{x} = < 0, 0, x_3 = arb. >$, haciendo $x_3 = 1$ se tiene el primer vector propio $\mathbf{u}^{(1)} = [0,\, 0,\, 1]^T$.

Cálculos similares para λ_2 y λ_3 determinan vectores propios correspondientes $\mathbf{u}^{(2)} = [7,\, 3,\, 0]^T$ y $\mathbf{u}^{(3)} = [1,\, 1,\, 0]^T$, por lo que la matriz M es

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El cálculo de e^{At} es

$$\begin{aligned} e^{At} &= MJM^{-1} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7e^{-t}-3e^{-5t} & 7(e^{-t}+e^{-5t}) & 0 \\ 3(e^{-t}-e^{-5t}) & 3e^{-t}+7e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & 4e^{t} \end{pmatrix} \qquad (17) \end{aligned}$$

$\ldots\diamond$

Dos valores propios iguales. En los siguientes ejemplos se tranan los casos de una matriz de tamaño 3×3 con dos valores propios iguales y uno distinto. En un caso la dimensión de subespacio generado por el valor propio repetido es igual a su multiplicidad algebraica. En el otro caso, la dimensión del subespacio propio es menor a la multiplicidad del valor propio repetido y en consecuencia se genera otro vector linealmente independiente del obtenido usando el criterio de vectores propios generalizados.[6]

El primer ejemplo es calcular e^{At} cuando

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Sus valores propios y su polinomio característico son

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1; \quad p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)^2 = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

Para el cálculo de sus vectores propios

- $\lambda_1 = 2$, la matriz $A - 2I$ es

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

  y el sistema $(A - 2I \vdots 0)$ tiene como solución el vector propio $\mathbf{u}^{(1)} = [-1, 1, 0]^T$.

- $\lambda_2 = -1$, la matriz $A + I$ es

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  y el sistema $(A + I \vdots 0)$ es reducible por renglones a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \end{pmatrix},$$

  que indica que la variable $x_2 = 0$ pero las variables x_1 y x_3 son arbitrarias,[1] escogiendo estas variables de manera que $x_1^2 + x_3^3 \neq 0$ en cada caso, se obtienen los vectores propios

[1] El hecho de que aparezcan dos renglones con entradas 0 indica que la dimensión del subespacio generado por el valor propio $\lambda_1 = -1$ es 2 que corresponde a su multiplicidad.

$\mathbf{u}^{(2)} = [1, 0, 0]^T$ y $\mathbf{u}^{(3)} = [0, 0, 1]^T$. En consecuencia, la matriz M y su correspondiente inversa, son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma canónica de Jordan asociada se calcula como

$$\begin{aligned} J &= M^{-1}AM \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y la correspondiente e^{Jt}

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Finalmente, la matriz buscada es

$$\begin{aligned} e^{At} &= Me^{Jt}M^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observación. La estructura de la matriz A se presta para el cálculo directo de la solución del sistema. La última ecuación (renglón 3) está completamente desacoplada de las otras dos y puede integrarse directamente. Las ecuaciones 1 y 2 (primer y segundo renglones) están parcialmente acopladas y puede integrarse direntamente la ecuación 2 (renglón2) para sustituir el resultado en la primera ecuación e integrar. Se invita al lector a llevar a cabo este proceso y comparar la solución obtenida con el resultado de arriba.

El segundo ejemplo se desarrolla usando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con valores propios y polinomio característico

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = \lambda_3 = -1; \quad p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

En este caso solamente se pueden obtener dos vectores propios, uno asociado a $\lambda_1 = 2$ y el otro $\lambda_2 = -1$

$$\mathbf{u}^{(1)} = [1, 0, 0]^T, \mathbf{u}^{(2)} = [-1, 1, 0]^T, \quad \text{respectivamente,}$$

y consecuencia de que la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda_2 = -1$ es $>$ que su multiplicidad algebraica. Para construir un vector propio generalizado linealmente independiente de $\mathbf{u}^{(2)}$, se considera el sistema

$$A + I\dot{:}\mathbf{v} = \mathbf{u}^{(2)}$$

de donde se encuentra que $\mathbf{v} = [-1 + v_2, v_2, 1]^T$, seleccionando $v_2 = 0$ se tiene $u^{(3)} = [-1, 0, 1]^T$.

El resto del cálculo es análogo al del ejemplo anterior y se tiene finalmente que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e2t & e^{2t} - e^{-t} & e^{2t} - (1+t)e^{-t} \\ 0 & e-t & te^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

3.2. Cálculo directo de la función exponencial matricial e^{At}.

Por otra parte, existen algunos métodos para el cálculo de e^{At} directamente, especialmente útiles para el caso en que la multiplicidad algebraica de un valor propio excede su multiplicidad geomética, pero que pueden ser usados en cualquier tipo de matriz A cuadrada de entradas constantes. Estos métodos hacen uso del teorema de Cayley-Hamilton en algún momento de su aplicación y no requieren pasar por el cálculo de una forma canónica de Jordan.

Un método directo. [1]

Proposición 1 *Sea la matriz $A : [2\times 2]$ con valores propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y defínanse la matrices*

$$Q_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad Q_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

entonces

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 && (19a) \\ Q_1 Q_1 &= Q_1^2 = Q_1, \quad Q_2 Q_2 = Q_2^2 = Q_2, \quad Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 = 0 && (19b) \\ A^k &= \lambda_1^k Q_1 + \lambda_2^k Q_2, \ \forall\ k \in \mathbb{N} && (19c) \\ e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = e^{\lambda_1 t} Q_1 + e^{\lambda_2 t} Q_2 && (19d) \end{aligned}$$

Demostración.
La demostración de las ecuaciones (19a) y (19b) es inmediata.
De la expansión binomial se tiene

$$\begin{aligned} A^k &= (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (\lambda_1 Q_1)^{k-j} (\lambda_2 Q_2)^j \\ &= \lambda_1^k Q_1 + \lambda_2^k Q_2, \ k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

consecuencia de las ecuaciones (19a) y (19b). La demostración de (19d) también es inmediata ya que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{A^j}{j!} t^j \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_1^j Q_1 + \lambda_2^j Q_2}{j!} t^j \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_1^j Q_1}{j!} t^j + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_2^j Q_2}{j!} t^j \\ &= e^{\lambda_1 t} Q_1 + e^{\lambda_2 t} Q_2 \end{aligned}$$

$\ldots \square$

Proposición 2 *Para una matriz A como en la proposición anterior excepto con valores propios iguales $\lambda_1 = \lambda_2$ sea ahora la matriz*

$$Q = A - \lambda_0 I, \quad \textit{donde} \quad \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$$

entonces

i) La matriz Q es nilpotente de grado 2.

ii)

$$e^{At} = (I + t(A - \lambda_o I))$$

Demostración.

i) Si Q es nilpotente de grado 2 entonces $Q^k = 0$ para toda $k \geq 2$ donde k es un natural. Entonces

$$\begin{aligned} Q^2 &= QQ \\ &= (A - \lambda_0 I)(A - \lambda_0 I) \\ &= (A - \lambda_0 I)^2 = 0 \end{aligned}$$

del teorema de Cayley-Hamilton, ya que el polinomio característico de A es

$$\phi(\lambda) = |(\lambda I - A)^2|$$

La demostración de que $Q^k = 0$ para naturales $k > 2$ se hace por inducción en k.

ii) Para obtener la exponencial matricial para este caso, se requiere un resultado previo.

$$A^k = (\lambda_0 I + Q)^k = \lambda_0^k I + k\lambda_0^{k-1} Q$$

entonces

$$\begin{aligned} e^{At} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\lambda_0^j}{j!} I + \frac{j}{j!} Q \right) t^j \\ &= e^{\lambda_0 t} I + t \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_0^{j-1}}{(j-1)!} t^{j-1} Q \\ &= e^{\lambda_0 t} \left(I + t(A - \lambda_0 I) \right) \end{aligned}$$

$\ldots \square$

Algoritmo de Putzer, método 1.[5] Sea el problema de valores iniciales

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \ (0, \mathbf{x}_0), \ 0 \leq t < \infty; \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \in \mathbb{R}^n \tag{20}$$

donde $A : [n \times n]$ es una matriz real constante.
Se propone obtener la solución de este problema en la forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \tag{21}$$

sin calcular la forma canónica de Jordan asociada a la matriz A. Este procedimiento es particularmente útil en el caso de raices repetidas del polinomio característico, sin embargo, del enunciado del problema, A aparte de satisfacer su descripción, es arbitraria. El polinomio característico de A se define como

$$p(\lambda) = \det\left(\lambda I_{[n]} - A\right) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_0 \tag{22}$$

Se define el operador diferencial lineal de coeficientes constantes

$$L \equiv p(D) = D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \ldots + c_1 D + c_0, \tag{23}$$

de manera que la función $z(t)$ es la solución del problema de valores iniciales

$$Lz = 0, \quad z(0) = \dot{z}(0) = \ldots z^{(n-2)} = 0, \quad z^{(n-1)} = 1 \tag{24}$$

La obtención de la solución de un problema lineal como este no ofrece ningún problema. Se definen también el vector

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{y la matriz} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\ \cdot & & & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & & 0 & \\ c_{n-1} & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{pmatrix} \tag{25}$$

Y se tiene

Teorema 3 (Putzer, Método 1) *La matriz exponencial*

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t) A^j$$

resuelve el problema de valores iniciales (20) y donde $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ *son los elementos del vector*

$$\mathbf{q} = C\mathbf{Z}.$$

Demostración.
Se requiere demostrar que la función

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t) A^j$$

resuelve el problema (20) esto es

- $$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = A\Phi$$

  y
- satisface la condición inicial

  $$\Phi(0) = I_n$$

y dada la unicidad de la solución de un problema de valores iniciales: $\Phi(t) \equiv e^{At}$.

Observación. Primero, ¿ cómo se ven las funciones $q_k(t)$?, llevando a cabo el producto $C\mathbf{Z}$

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 z + c_2 \dot{z} + \ldots + z^{(n-1)} \\ c_2 z + c_3 \dot{z} + \ldots + z^{(n-2)} \\ \vdots \\ z \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que

$$q_j = \sum_{k=1}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k-1)} + z^{(n-j-1)} \tag{26}$$

De este resultado se tiene que

$$\text{para} \quad t = 0, q_0 = 1, \, q_1 = \ldots = q_{n-1} = 0$$

y en consecuencia

$$\Phi(0) = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(0) A^j = q_0(0) A^0 = I_n$$

y se satisface la condición inicial.

Resta demostrar que la función Φ satisface la ecuación diferencial pero esto es equivalente a demostrar que

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - A\Phi = 0$$

entonces, de la definición de Φ

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - A\Phi &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} A^j - A \sum_{j=0}^{n-1} q_j A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \dot{q} A^j - \sum_{j=0}^{n-1} q_j A^{j+1} \end{aligned}$$

El término $\sum_{j=0}^{n-1} q_j A^{j+1}$ requiere un poco de atención. En efecto

$$\sum_{j=0}^{n-1} q_j A^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-2} q_j A^{j+1} + q_{n-1} A^n$$

Pero del Teorema de Cayley-Hamilton

$$A^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j A^j = 0$$

por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{n-1} q_j A^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-2} q_j A^{j+1} - q_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_j A^j$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - A\Phi &= \sum_{j=0}^{n-1} \dot{q} A^j - \sum_{j=0}^{n-1} q_j A^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \dot{q} A^j - \sum_{j=0}^{n-2} q_j A^{j+1} + q_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_j A^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \dot{q} A^j - \sum_{j=1}^{n-1} q_{j-1} A^j + q_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_j A^j \\
&= \left(\dot{q}_0 + c_0 q_{n-1}\right) I_n + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\dot{q}_j - q_{j-1} + c_j q_{n-1}\right) A^j
\end{aligned}
$$

Entonces, si Φ satisface la ecuación diferencial, los coeficientes de esta serie de potencias en la matriz A todos son 0. Esto es se requiere demostrar que

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_0 + c_0 q_{n-1} &= 0 && (27a) \\
\dot{q}_j - q_{j-1} + c_j q_{n-1} &= 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, (n-1) && (27b)
\end{aligned}
$$

Derivando la ecuación (26)

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_j &= c_{1+j} \dot{z} + c_{2+j} \ddot{z} + \ldots + c_{n-1} z^{(n-j-1)} + z^{(n-j)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k)} + z^{(n-j)} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

De aquí que, para $j = 0$ y $z = q_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_0 &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k z^{(k)} + z^{(n)} \\
&= c_1 \dot{z} + c_2 \ddot{z} + \ldots + c_{n-1} z^{(n-1)} + z^{(n)},
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_0 + c_0 q_{n-1} &= c_0 q_{n-1} + c_1 \dot{z} + c_2 \ddot{z} + \ldots + c_{n-1} z^{(n-1)} + z^{(n)} \\
&= c_0 z + c_1 \dot{z} + c_2 \ddot{z} + \ldots + c_{n-1} z^{(n-1)} + z^{(n)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ya que es la ecuación diferencial (24).
Para $j \geq 1$, se requiere ahora demostrar que

$$\dot{q}_j + c_j q_{n-1} = q_{j-1}$$

Para demostrar la igualdad se examinan ambos lados de la ecuación por separado
Lado izquierdo:

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_j + c_j q_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k-j)} + z^{(n-j)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k)} + z^{(n-j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Lado derecho: De la ecuación (26)

$$\begin{aligned} q_{j-1} &= \sum_{k=1}^{n-j} c_{k+j-1} z^{(k-1)} + z^{(n-j)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k)} + z^{(n-j)} \\ & \quad \text{cambiando el índice } k-1 \to k \ \text{ en la sumatoria} \end{aligned}$$

De la comparación de este resultado con la ecuación (29) se tiene el resultado buscado. En consecuencia $\Phi(t)$ satisface el sistema (1a) y las condiciones iniciales (1b) y

$$\Phi(t) \equiv e^{At}$$

$\ldots \square$

3.2.1. Ejemplo.

El primer ejemplo es uno ya resuelto usando el algoritmo asociado a la forma canónica de Jordan. Determinar la matriz e^{At} donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico tiene tres valores propios distintos

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 5; \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -5$$

Este algoritmo de Putzer requiere resolver la ecuación diferencial

$$z''' + 5z'' - z' - 5z = 0, \quad \text{condiciones iniciales} \quad z(0) = z'(0) = 0, \ z''(0) = 1$$

La solución de este problema es inmediata

$$z(t) = \frac{1}{24} e^{-5t} - \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{t}$$

Con esta función y los coeficientes del polinomio característico se construyen las matrices

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z(t) \\ \\ z'(t) \\ \\ z''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} e^{-5t} - \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{t} \\ \\ -\frac{5}{24} e^{-5t} + \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{t} \\ \\ \frac{25}{24} e^{-5t} - \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{t} \end{pmatrix} \tag{30}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Las funciones q se obtienen de

$$\mathbf{q} = C\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \\ q_1 \\ \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} e^{-5t} + \frac{5}{8} e^{-t} + \frac{5}{12} e^{t} \\ \\ -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{t} \\ \\ \frac{1}{24} e^{-5t} - \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{t} \end{pmatrix} \tag{32}$$

La función exponencial matricial buscada es

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{j=0}^{2} q_j A^j \\
&= q_0 I_3 + q_1 A + q_2 A^2 \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3e^{-5t}+7e^{-t} & 7(e^{-5t}-e^{-t}) & 0 \\ -3(e^{-5t}-e^{-t}) & 7e^{-5t}-3e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 4e^{t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

y que es la matriz obtenida arriba.

Observación. Cabe hacer notar que las operaciones con matrices fueron llevadas a cabo usando Maple 9 ya que algunos productos matriciales involucran un número apreciable de operaciones algebraicas y un pequeño error puede llevar fácilmente a un resultado equivocado.

Algoritmo de Putzer, método 2. En el teorema siguiente cuya demostración se presenta, la matriz $A : [n \times n]$ también es constante pero por lo demás es arbitraria. Se requiere que tenga los valores propios $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ no necesariamente distintos pero siguiendo un orden arbitrario prestablecido.

Teorema 4 (Putzer, Método 2) *La función matriz exponencial*

$$
e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1} P_j \tag{33}
$$

resuelve el sistema (1a), (1b).
Donde

$$
P_0 = I, \qquad P_j = \prod_{k=1}^{j} (A - \lambda_k I) \tag{34a}
$$

$$
r_1,\ r_2\ \ \ldots\ \ r_n \quad \textit{solución del sistema:}
$$

$$
\dot{r}_1 = \lambda_1 r_1, \qquad r_1(0) = 1 \tag{34b}
$$

$$
\dot{r}_j = r_{j-1} + \lambda_j r_j, \qquad r_j(0) = 0,\ j = 2, 3, \ldots, n \tag{34c}
$$

Demostración.
Como en la demostración del teorema Putzer, Método 1 se define una función Φ y se demuestra que satisface el sistema (1a) las condiciones iniciales asociadas (1b). Así, sean

$$
\Phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1} P_j, \quad \text{y} \quad r_0(t) = 0,
$$

entonces

$$
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=0}^{n-1} \dot{r}_{j+1} P_j,
$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \lambda_n \Phi(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \dot{r}_{j+1} P_j - \lambda_n \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1} P_j \\
&= \dot{r}_1 P_0 + \dot{r}_2 P_1 + \ldots + \dot{r}_{n-2} P_{n-1} + \\
&\quad -\lambda_n \left(r_1 P_0 + r_2 P_1 + \ldots + r_n P_{n-1} \right) \\
&= \left(\lambda_1 P_0 + P_1 - \lambda_n P_0 \right) r_1 + \left(\lambda_2 P_1 + P_2 - \lambda_n P_1 \right) r_2 + \ldots + \\
&\quad + \left(\lambda_{n-1} P_{n-2} + P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2} \right) r_{n-1} + (\lambda_n P_{n-1} - \lambda_n P_{n-1}) r_n \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \left(P_{j+1} + (\lambda_{j+1} - \lambda_n) P_j \right) r_{j+1}
\end{aligned}
$$

Dado que

$$P_{j+1} = (A - \lambda_{j+1} I) P_j$$

(ver (34a)), se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \lambda_n \Phi(t) &= \sum_{j=0}^{n-2} \left((A - \lambda_{j+1} I) P_j + (\lambda_{j+1} - \lambda_n) P_j \right) r_{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \left(A - \lambda_n I \right) P_j \, r_{j+1}
\end{aligned}
$$

Pero el lado derecho de esta ecuación no se altera si se suma y resta el mismo polinomio

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \lambda_n \Phi(t) &= \sum_{j=0}^{n-2} \left(A - \lambda_n I \right) P_j \, r_{j+1} + (A - \lambda_n I)(P_{n-1} r_n - P_{n-1} r_n) \\
&= (A - \lambda_n I) \sum_{j=0}^{n-1} P_j \, r_{j+1} - (A - \lambda_n I) P_{n-1} r_n \\
&= (A - \lambda_n I)\Phi - P_n r_n
\end{aligned}
$$

Del teorema de Cayley-Hamilton se tiene que $P_n = 0$, en consecuencia la ecuación de arriba implica

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = A\Phi(t)$$

También, por otra parte para $t = 0$

$$\Phi(0) = I$$

y con esto se demuestra el teorema. $\ldots\square$

3.2.2. Ejemplo.

El siguiente ejemplo es un viejo conocido, calcular e^{At} donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que el polinomio característico y los respectivos valores propios son

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 5; \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -5$$

De acuerdo con esta variante método de Putzer y considerando los valores propios en el orden específico indicado arriba, es necesario primero resolver el siguiente sistema de EDO

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t} &= (1)r_1(t), \quad r_1(0) = 1 \\
\frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t} &= r_1(t) + (-1)r_2(t), \quad r_2(0) = 0 \\
\frac{\mathrm{d}r_3(t)}{\mathrm{d}t} &= r_2(t) + (-5)r_3(t), \quad r_3(0) = 0
\end{aligned}$$

Las soluciones a este sistema de ecuaciones son

$$r_1(t) = e^t \tag{35a}$$

$$r_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \tag{35b}$$

$$r_3(t) = \frac{1}{12}e^t - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{24}e^{-5t} \tag{35c}$$

Por otra parte, esta variante del método de Putzer requiere del cálculo de las siguientes matrices

$$P_0 = I_3,\ P_1 = P_0(A - I_3),\ P_2 = P_1(A + I_3);\ P_3 = P_2(A + 5I_3) = 0 \quad \text{(Teorema de Cayley-Hamilton)}$$

Así:

$$P1 = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P2 = \begin{pmatrix} -18 & 42 & 0 \\ -18 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y la exponcial matricial es

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{2} r_{j+1} Pj = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7e^{-t} - 3e^{-5t} & 7(-e^{-t} + e^{-5t}) & 0 \\ 3(e^{-t} - e^{-5t}) & -3e^{-t} + 7e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & 4e^t \end{pmatrix}$$

3.3. Un último ejemplo.

Sea la matriz

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Calcular la función e^{Ft}.

Solución.

Como se puede observar la matriz puede ser particionada en cuatro bloques de tamaño 3×3:

$$F = \begin{pmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ B_{21} & \vdots & B_{22} \end{pmatrix}$$

Más aún, las variables del bloque B_{11} son completamente independientes de las del bloque B_{22} por lo que ambos bloques pueden ser procesados de manera independiente. Por simplicidad se denotarán estos bloques como $F1 = B_{11}$ y $F2 = B_{22}$.

i) La matriz $F1$

$$F1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene como polinomio característico y valores propios

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2, \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

La matriz exponencial de e^{F1t} se obtendrá siguiendo el método tradicional de obtener la forma canónica de Jordan y también por la variante 2 del método de Putzer.

Forma canónica de Jordan. Para el valor propio $\lambda_1 = -2$ se tiene

$$F1 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución del sistema

$$(F1 + 2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tiene como solución

$$\mathbf{x} = [x_1 = arb., 0, 0]^T$$

Con la selección de $x_1 = 1$ se tiene el primer vector propio $\mathbf{u} = [1, 0, 0]^T$.
El valor propio $\lambda_2 = -1$ tiene multiplicidad 2, su multiplicidad geométrica se observa de la estructura de la matriz

$$F1 + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se tiene que solamente se puede obtener un vector propio linealmente independiente asciado a este valor propio.
El segundo vector propio se obtiene de resolver el sistema

$$(F1 + I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

El vector $\mathbf{x}$ tiene la forma $\mathbf{x} = [0,\, x_2 = arb.,\, 0]^T$, escogiendo $x_2 = 1$ se tiene el vector propio $\mathbf{u}_2[0,1,0]^T$. El tercer vector requerido para generar la matriz M es un vector propio generalizado y se obtiene de resolver el sistema

$$(F1 + I_3)\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$$

El vector $\mathbf{x} = [0, x_2 = arb., 1]^t$, asignando el valor $x_2 = 0$ se tiene el tercer vector $\mathbf{u}_3 = [0,0,1]^t$. En consecuencia

$$M = [\mathbf{u}_1 \vdots \mathbf{u}_2 \vdots \mathbf{u}_3] = I_3$$

En consecuencia

$$J = F1$$

y

$$e^{F1t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$\ldots \diamond$

Método de Putzer,v. 2. Como ya se ha establecido este método requiere de la solución del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} &= -2r_1 \\ \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} &= r_1 - r_2 \\ \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t} &= r_2 - r_3 \end{aligned}$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$r_1(0) = 1,\; r_(0) = 0,\; r_3(0) = 0$$

Su solución es

$$\begin{aligned} r_1(t) &= e^{-2t} \\ r_2(t) &= -e^{-2t} + e^{-t} \\ r_3(t) &= (t-1)e^{-t} + e^{-2t} \end{aligned}$$

Y también requiere las matrices

$$\begin{aligned} P0 &= I_3 \\ P1 &= P0\,(F1 - \lambda_1 I_3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P2 &= P1\,(F1 - \lambda_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La exponencial matricial de $F1$ es

$$e^{F1\,t} = r_1(t)P0 + r_2(t)P1 + r_3(t)P2 \tag{37}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \tag{38}$$

ii) La matriz $F2$ Esta submatriz es interesante porque tiene un valor propio con multiplicidad 3. Su exponencial matricial se obtendrá mediante el cálculo de su forma canónica de Jordan, el cálculo de la matriz Q descrita arriba en la Proposicón (2) y el método de Putzer en su versión 2. La matriz a tratar es

$$F2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Forma canónica de Jordan. El polinomio característico y los valores propios son

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3 = \lambda$$

Para el cálculo de los vectores propios se requiere

$$F2 - 3\,I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la solución sistema

$$(F2 - 3\,I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

se obtiene el primer vector propio $\mathbf{u}_1 = [1,\, 0,\, 0]^T$. Este vector es único dado que $\dim(\mathcal{V}_\lambda) = 1 < 3$ su multiplicidad algebraica. Los otros dos vectores propios necesarios para construir a la matriz M se obtienen de la cadena de vectores propios generalizados asociada al vector propio $\mathbf{u}$

$$(F2 - 3\,I_3)\mathbf{V}_1 = \mathbf{u} \tag{40}$$

$$(F2 - 3\,I_3)^2\mathbf{V}_2 = \mathbf{u} \tag{41}$$

De la solución de la ecuación (40) se obtiene el vector $[x_1 = arb.,\, 1,\, 0]^T$ asignando un valor x_1 de manera que los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ sean linealmente independientes, un valor adecuado es $x_1 = 0$, y el vector $\mathbf{u}_2 = [0,\, 1,\, 0]^T$.
La solución de la ecuación (41) arroja un vector con componentes $[x_1 = arb.,\, x_2 = arb.,\, 1]^T$. De la selección de los valores de $x_1 = x_2 = 0$ se tiene el tercer vector linealmente independiente de los dos primeros, $\mathbf{u}_3 = [0,\, 0,\, 1]^T$. En consecuencia $M = I_3$, la matriz J es $F2$ y la matriz exponencial es

$$e^{F2\,t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & (1 + \frac{t}{2})te^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Matriz Q De acuerdo con la Proposicón (2), la matriz

$$Q = F2 - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y dado que

$$\begin{aligned} e^{F2\,t} &= e^{3t}(I_3 + tQ + \frac{t^2}{2}Q^2) \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & (1+\frac{t}{2})te^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un procedimiento muy eficiente.

Método de Putzer,v. 2. Como ya está establecido, se requiere el cálculo de las matrices

$$P1 = F2 - 3I_3,\ P2 = (F2 - 3I_3)^2$$

y la solución del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} &= r_1, \quad r_1(0) = 1 \\ \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} &= r_1 + 3r_2, \quad r_2(0) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t} &= r_2 + 3r_3, \quad r_3(0) = 0 \end{aligned}$$

que es

$$\begin{aligned} r_1(t) &= e^{3t} \\ r_2(t) &= te^{3t} \\ r_3(t) &= \frac{1}{2}t^2e^{3t} \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} e^{F2\,t} &= r_1 I_3 + r_2 P1 + r_3 P2 \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & (1+\frac{t}{2})te^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que es el resultado esperado.

Para regresar al problema original, la matriz e^{Ft} se construye usando las matrices $e^{F1\,t}$ y $e^{F2\,t}$ por bloques, esto es

$$e^{Ft} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} & (1+\frac{t}{2})te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

4. Apéndices.

.1. Transformaciones por similaridad.

Sean las matrices A, B de tamaño $[n \times n]$ y sea λ un valor propio común. Si $\mathbf{u}$ es un vector propio asociado a λ se tiene que

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

Sea P una matriz no singular de tamaño $[n \times n]$, entonces el vector $\mathbf{w} = P\mathbf{u}$ no es, en general, un vector propio asociado a λ ya que

$$PA\mathbf{u} = \lambda(P\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{w} \tag{42}$$

que no es lo mismo que $A(P\mathbf{u}) = \lambda(P\mathbf{u})$. Sin embargo $P^{-1}P\mathbf{u} = \mathbf{u}$ y sustituyendo este valor en la ecuación (42)

$$PAP^{-1}(P\mathbf{u}) = \lambda(P\mathbf{u}),$$

es decir

$$PAP^{-1}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$$

por lo que $\mathbf{w}$ es un vector propio de la matriz $B = PAP^{-1}$. Las formas PAP^{-1} y $P^{-1}AP$ son equivalentes[3] y determinan si dos matrices son semejantes o similares de acuerdo a la siguiente

Definición 2 *Sean las matrices A, B de tamaño $n \times n$, se dice que son semejantes si existe una matriz $P : [n \times n]$ no singular tal que*

$$B = P^{-1}AP$$

y se escribe $A \sim B$.

Similaridad es una relación de equivalencia lo que se establece en la siguiente

Proposición 3 *Sean las matrices A, B y C reales de tamaño $n \times n$. Entonces*

- *$A \sim A$,*
- *Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$, y*
- *Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.*

Demostración.
Una relación de equivalencia es reflexiva, simétrica y transitiva. Esto es

a) $A \sim A$**.** La matriz identidad $I_{[n]}$ de tamaño $n \times n$ es no singular y

$$A = I_{[n]}^{-1} A I_{[n]}$$

b) $A \sim B$**.** Entonces existe una matriz no singular P tal que

$$A \sim B \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

De esta ecuación se tiene que

$$A = PBP^{-1}$$

denotando $R = P^{-1}$, esta ecuación se escribe como

$$A = R^{-1}BR$$

y en consecuencia $B \sim A$.

c) En el último caso la hipótesis es

$$A \sim B \quad \text{y} \quad B \sim C$$

ecuación que implica la existencia de matrices P y Q, de tamaño $n \times n$, no singulares tales que

$$B = P^{-1}AP \quad \text{y} \quad C = Q^{-1}BQ$$

Entonces

$$\begin{aligned} C &= Q^{-1}BQ \\ &= Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\ &= (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) \end{aligned}$$

Pero $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$, en consecuencia

$$C = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

$\ldots \square$

El siguiente teorema es fundamental en la obtención de la solución de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

Teorema 5 *Las matrices A y B de tamaño $[n \times n]$ tales que $A \sim B$ entonces tienen los mismos valores propios.*

Demostración.
La hipótesis es $A \sim B$ se requiere demostrar que A y B tienen los mismos valores propios.

Es suficiente con demostrar que ambas matrices tienen el mismo polinomio característico. Dado que $A \sim B$ existe una matriz no singular P tal que

$$B = P^{-1}AP,$$

más aún $\det(P^{-1})\det(P) = 1$. El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ahora

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)\det(P)) \\ &= \det(P^{-1}(A)P - \lambda I) \\ &= \det(B - \lambda I) \end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. $\ldots \square$

.2. Teoremas usados en el texto.

El siguiente lema se usa en la demostración del inciso c) del teorema (2).

Lema 1 *Sea la matriz real $C : [2 \times 2]$ con valores propios $\alpha \pm \imath\beta$, con $\beta > 0$. Sea también el vector propio $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \imath\mathbf{w}$, entonces*

$$C\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w} \quad y \quad C\mathbf{w} = \beta\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$$

Demostración.
El resultado es inmediato ya que

$$\begin{aligned} C\mathbf{u} &= C(\mathbf{v} + \imath\mathbf{w}) \\ C\mathbf{v} + \imath C\mathbf{w} &= \lambda\mathbf{u} \\ &= (\alpha + \imath\beta)(\mathbf{v} + \imath\mathbf{w}) \\ &= (\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}) + \imath(\beta\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Y se demuestra el lema después de comparar partes reales e imaginarias de ambos lados de la ecuación anterior. . . . $\square$

.2.1. Teorema de Cayley-Hamilton.

El teorema que lleva este nombre dice

Teorema 6 *Toda matriz A satisface su ecuación característica. Esto es, si*

$$\phi(x) = |xA - A|, \quad entonces, \quad \phi(A) = 0.$$

Demostración.
La demostración requiere de un resultado asociado al teorema fundamental del álgebra, el llamado teorema del residuo

Teorema 7 *Sea $f(x)$ un polinomio mónico de grado n y sea $a \in \mathbb{C}$ entonces*

$$f(x) - f(a) = (x - a)g(x) \tag{43}$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$.

Entonces, del teorema del residuo, que sigue siendo válido para polinomios con matrices constantes como coeficientes, se tiene que para cualquier polinomio f

$$f(x)I - f(A) = (xI - A)g(x) \tag{44}$$

para algún polinomio $g(x)$ con matrices constantes como coeficientes.

Por otra parte, de la expansión de Laplace de un determinante

$$(xI - A) \cdot \mathrm{adj}(xI - A) = |xI - A| \cdot I = \phi(x)$$

donde $\phi(x)$ es el polinomio característico de la matriz A y $\text{adj}(xI - A)$ es una matriz cuyas entradas son polinomios en x y que puede escribirse como un polinomio en x con coeficientes matriciales. De la ecuación (44)

$$\phi(x)I - \phi(A) = (xI - A)\psi(x)$$

para algún polinomio ψ. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi(A) &= \phi(x)I - (xI - A)\psi(x) \\
&= (xI - A)\text{adj}(xI - A) - (xI - A)\psi(x) \\
&= (xI - A)\left[\text{adj}(xI - A) - \psi(x)I\right]
\end{aligned}$$

Ahora, la matriz entre paréntesis cuadrados debe ser nula ya que si no lo es puede escribirse como un polinomio en x de tipo $x^r C$, donde C es una matriz distinta de la matriz 0. Por lo tanto el lado derecho tiene un término con la potencia más alta en x, $x^{r+1}C$ que no se cancela con ningún otro término de ese lado; mientras que el lado izquierdo no depende de x. Esto es una contradicción y en consecuencia el lado derecho es 0, y

$$\phi(A) = 0$$

como era requerido.

$\ldots \square$

.2.2. Formas canónicas de Jordan.

En los siguientes teoremas se indica el cálculo del polinomio característico y de la función exponencial matricial de una matriz A de tamaño $n \times n$.

Teorema 8 (Polinomio caracterísitco.) *[3] Sea A de tamaño $n \times n$ entonces su polinomio característico está dado por*

$$p(\lambda) = (-\lambda)^n + \xi_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \xi_{n-1}\lambda + \xi_n$$

Donde

- $$\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \quad \textit{la traza de } A$$
- $$\xi_2 = \sum_{j>i} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$$
  la suma de todos los menores principales de orden 2.
- $$\xi_r = \textit{ la suma de } \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
  menores principales de orden r que preservan el orden natural de las columnas.
- $\xi_n = \det A$

Distintos casos de valores propios.

n **raices reales distintas.**

Teorema 9 *Sea A una matriz real con n valores propios reales distintos, entonces existe una matriz no singular $M = [\mathbf{u}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{u}_n]$, donde $\mathbf{u}_k$ es el vector propio asociado al valor propio λ_k y $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_n$, tal que*

$$J = M^{-1}AM = \mathrm{diag}(\lambda_k), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\, n$$

Además

$$e^{At} = M\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_k})\,M^{-1}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\, n$$

donde diag *es una matriz diagonal de tamaño* $[n \times n]$.

$2n$ raices complejas conjugadas distintas.

Teorema 10 *Sea $A : [2n\times 2n]$ una matriz real con $2n$ valores propios complejos distintos $\lambda_k = a_k + \imath b_k$ y $\bar{\lambda}_k = a_k - \imath b_k$ a los que corresponden los vectores propios $\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k + \imath \mathbf{w}_k$ y $\bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{v}_k - \imath \mathbf{w}_k$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^{2n}$ y*

$$M = [\mathbf{v}_1 \vdots \mathbf{w}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n \vdots \mathbf{w}_n]$$

es una matriz no singular tal que

$$\begin{aligned} J &= M^{-1}AM \\ &= \mathrm{diag}\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}; \quad k = 1, \ldots, , n \end{aligned}$$

es una matriz real, de tamaño $[2n \times 2n]$, con bloques de 2×2 a lo largo de la diagonal principal.

Más aún, sea la matriz ortogonal

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos b_k t & -\mathrm{sen}\, b_k t \\ \mathrm{sen}\, b_k t & \cos b_k t \end{pmatrix},$$

entonces

$$e^{At} = M\,\mathrm{diag}\left(e^{a_k t} R_k\right) M^{-1}$$

Raices reales repetidas.

Teorema 11 *Sea $A : [n \times n]$ una matriz real con valores propios λ_k, $k < n$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad algebraica. Entonces*

- *Existe una base de vectores propios generalizados para $\mathbb{R}^n$.*
- *Si $\{\mathbf{u}_1,\, \ldots,\, \mathbf{u}_n\}$ es una base de vectores propios generalizados para $\mathbb{R}^n$, la matriz*

  $$M = [\mathbf{u}_1 \vdots \ldots \vdots \mathbf{u}_n]$$

  es no singular y la matriz A se puede descomponer en las matrices

  $$A = S + N$$

  donde

  $$M^{-1}SM = \mathrm{diag}(\lambda_k)$$

- *La matriz $N = A - S$ es nilpotente de orden $p \le n$.*

- *La matrices S y N conmutan en su producto.*
- *La exponencial matricial es*

$$e^{At} = M \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_k t}\right) M^{-1} \left(I + Nt + \cdots + \frac{N^{p-1}t^{p-1}}{(p-1)!}\right)$$

Y también el siguiente

Corolario 1 *Con las hipótesis del teorema anterior, si A tiene un solo valor propio de multiplicidad algebraica n, entonces*

$$S = \operatorname{diag}(\lambda), \quad N = A - S, \quad N \text{ es nilpotente de orden } p$$

y

$$e^{At} = e^{\lambda t}\left(I + Nt + \cdots + \frac{N^{p-1}t^{p-1}}{(p-1)!}\right)$$

Raices complejas repetidas.

El tratamiento para este caso es muy similar al de raices reales repetidas.

Teorema 12 *Sea la matriz real $A : [2n \times 2n]$ con valores propios complejos $\lambda_k = a_k + \imath b_k$ y $\bar{\lambda}_k = a_k - \imath b_k$ tales que la forma cuadrática $\lambda^2 - 2a_k + (a_k^2 + b_k^2)$ tiene multiplicidad algebraica menor $2n$, entonces*

- *Existe una base de vectores propios generalizados complejos para $\mathbb{C}^{2n}$*

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{v}_k + \imath \mathbf{w}_k \quad y \quad \bar{\mathbf{u}}_k^* = \mathbf{v}_k - \imath \mathbf{w}_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

- *Una base para $\mathbb{R}^{2n}$ es $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n\}$.*
- *Para alguna de estas bases de $\mathbb{R}^{2n}$ la matriz*

$$M = [\mathbf{v}_1 \vdots \mathbf{w}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{v}_n \vdots \mathbf{w}_n]$$

es no singular y la matriz A se puede descomponer en las matrices

$$A = S + N$$

donde

$$M^{-1}SM = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$$

- *La matriz $N = A - S$ es nilpotente de orden $p \leq 2n$.*
- *La matrices S y N conmutan en su producto.*
- *La exponencial matricial*

$$\begin{aligned} e^{At} &= M \operatorname{diag}\left(e^{a_k t}\begin{pmatrix} \cos b_k t & -\operatorname{sen} b_k t \\ \operatorname{sen} b_k t & \cos b_k t \end{pmatrix}\right) M^{-1} \times \\ &\times \left(I + Nt + \cdots + \frac{N^{p-1}t^{p-1}}{(p-1)!}\right) \end{aligned}$$

.3. Vectores propios generalizados.

A continuación se definen vector propio generalizado y una cadena de vectores propios generalizados asociados y se enumeran sus propiedades más importantes.

Su origen se encuentra en a necesidad de determinar una base para expresar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la que A es su matriz asociada cuando A tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica $k > 1$. Se define la multiplicidad geométrica de λ como la dimensión ($\dim E_\lambda$) del subespacio generado por sus vectores propios linealmente independientes. Por simplicidad, si A tiene $n-k$ valores propios distintos y la multiplicidad geométrica de λ es igual a la algebraica, entonces se tienen $n-k$ vectores linealmente independientes asociados a los $n-k$ valores propios distintos y además k vectores linealmente independientes generadores de E_λ. En consecuencia, se tienen en total n vectores linealmente independientes suficientes para una base de T. Por el contrario, si $\dim E_\lambda < k$ no se tiene el número suficiente de vectores linealmente independientes para una base de T. Sin embargo, esposible completar esa base construyendo vectores propios generalizados [6].

Definición 3 *Sea A una matriz con un valor propio λ con multiplicidad mayor que 1. Se dice que* $\mathbf{v}$ *en un vector propio generalizado de la matriz A de rango k asociado a λ, si*

$$(A-\lambda I)^k\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad y \quad (A-\lambda I)^{k-1}\,\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

Definición 4 *Para un vector propio generalizado* $\mathbf{v}$ *como en la definición anterior, se define una cadena de vectores propios generalizados de longitud k de la manera siguiente. Sea $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{k-1} &= (A-\lambda I)\mathbf{v}_k = (A-\lambda I)\mathbf{v} \\
\mathbf{v}_{k-2} &= (A-\lambda I)\mathbf{v}_{k-1} = (A-\lambda I)^2\mathbf{v} \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_1 &= (A-\lambda I)\mathbf{v}_2 = (A-\lambda I)^{k-1}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Entre las propiedades más importantes de una cadena de vectores propios generalizados se listan

- Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una cadena de vectores propios generalizados de longitud k asociados al valor propio λ entonces esta cadena es un conjunto de vectores linealmente independientes.
- Vectores propios generalizados para la matriz A asociados a distintos valores propios son linealmente independientes entre sí.
- Si $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ y $S_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ son dos cadenas de vectores propios generalizados de longitudes k y m respectivamente, asociados al mismo valor propio λ, entonces, si $\mathbf{v}_k$ y $\mathbf{u}_m$ son linealmente independientes $S_1 \cup S_2$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.
- La suma de las longitudes de todas las cadenas linealmente independientes asociadas al valor propio λ es igual a su multiplicidad.

Referencias

[1] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Dynamical systems differential equations, maps and chaotic behaviour*, Chapman & Hall, London - Weinheim - New York - Melbourne - Madras, 1996.

[2] P. M. Cohn, *Elements of linear algebra*, Chapman and Hall, Boca Raton London New York Washington, D.C., 1994.

[3] G. Hadley, *Linear algebra*, Addison Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, U.S.A., 1961.

[4] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, TAM vol 7, Springer-Verlag, 1991.

[5] E. J. Putzer, *Avoiding the jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, American Mathematical Monthly (1996), no. 1, 2–7.

[6] A. J. Insel S. H. Friedberg and L. Spence, *Linear algebra*, Prentice Hall, New York, 2003.