CÁLCULO III
CUADERNO DE EJERCICIOS

Dra. Lorena Zogaib
Departamento de Matemáticas
ITAM

Agosto 1, 2016

INTRODUCCIÓN

Este documento constituye un material de apoyo para el curso de Cálculo III para las carreras de Economía y Dirección Financiera en el ITAM. Contiene una recopilación de ejercicios y aplicaciones, que complementan el documento de trabajo *Cálculo III, Notas de Clase*, Lorena Zogaib, Departamento de Matemáticas, ITAM, agosto 1 de 2016.

Gran parte de estos ejercicios fueron tomados de la bibliografía del curso, así como del material utilizado por otros profesores, muy especialmente de las hojas de trabajo de mi querida colega Carmen López Laiseca. La secuencia de los temas obedece al orden del temario vigente, por lo que se espera que el estudiante avance en las tareas a medida que se vaya cubriendo en clase el material correspondiente.

Con el fin de que el estudiante pueda verificar sus resultados, pongo a su disposición mis soluciones a estos ejercicios, que están publicadas en el documento de trabajo *Cálculo III, Cuaderno de Ejercicios, Soluciones,* Lorena Zogaib, Departamento de Matemáticas, ITAM, agosto 1 de 2016. Recomiendo ampliamente al lector consultar las soluciones sólo después de haber intentado resolver los ejercicios por sí mismo.

Para la elaboración de este documento, tuve la suerte de contar con la colaboración de dos estudiantes de Economía del ITAM: Angélica Martínez Leyva, que realizó la transcripción del texto, de Word a Scientific WorkPlace, y con Rigel Jarabo García, que elaboró la gran mayoría del material gráfico. Quiero expresar mi agradecimiento a ellas, por el entusiasmo y esmero con que llevaron a cabo su trabajo.

Agradezco de antemano sus comentarios y correcciones en relación con este material.

Lorena Zogaib

CÁLCULO III
TAREA 1
INTEGRAL INDEFINIDA. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN
(Tema 1.1)

1. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\int \frac{-3}{\sqrt[5]{x^4}}\, dx.$

   (b) $\int \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\, dx.$

   (c) $\int \left(\frac{x}{5} - \frac{2}{x^3} + 2\right)\, dx.$

   (d) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)^2\, dx.$

   (e) $\int \left(\sqrt{e^{2x}} + \ln 2\right)\, dx.$

2. En cada inciso encuentra una función $f(x)$ que satisfaga la ecuación dada:

   (a) $f'(x) = 7x + \cos x.$

   (b) $f''(x) = 9x^2 + 6x.$

   (c) $f''(x) = -1.$

   (d) $f''(x) = 0.$

3. Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales:

   (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x, \;\; y(2) = 1.$

   (b) $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{3t}{8}, \;\; s(4) = 4, \;\; s'(4) = 3.$

4. La utilidad marginal de cierta empresa es $100 - 2q$ dólares cuando se producen q unidades. Si la utilidad de la empresa es de 700 dólares cuando se producen 10 unidades, determina la utilidad máxima y el nivel de producción en el que ésta se alcanza.

5. Encuentra la curva $y(x)$ que pasa por el punto $(-1, 2)$ y cuya pendiente en cualquier punto de la curva es igual a dos veces la abscisa de ese punto.

6. Utiliza el método de sustitución para determinar las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\int \sqrt{1-2x}\, dx.$

   (b) $\int \frac{y-1}{\sqrt{y^2-2y+1}}\, dy.$

   (c) $\int \frac{7r^3}{\sqrt[5]{1-r^4}}\, dr.$

(d) $\int \dfrac{3x}{(3x^2+3)^3}\ dx.$

(e) $\int sen\,(-4x)\ dx.$

(f) $\int sen^5\left(\dfrac{x}{3}\right)\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)\ dx.$

(g) $\int 2x^2\cos(x^3)\ dx.$

(h) $\int \dfrac{1}{x^2}\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\ dx.$

(i) $\int \cos x\,\sqrt{1-2\,sen\,x}\ dx.$

(j) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\ dx.$

(k) $\int x\sqrt{3x+2}\ dx.$

(l) $\int \dfrac{e^{2x}}{e^2+e^{2x}}\ dx.$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x}\sqrt{1+\frac{1}{e^x}}\ dx.$

(n) $\displaystyle\int \frac{2^{1/x}}{x^2}\ dx.$

(o) $\displaystyle\int \frac{\ln(4\sqrt{x})}{x}\ dx.$

(p) $\int (e^x+e^{-x})^2\ dx.$

(q) $\int (3^x+1)^2\ dx.$

(r) $\int x^{3\alpha}\ d\alpha,\qquad x>1$ constante.

7. (a) Demuestra que

$$\int (ax+b)^p\ dx = \frac{1}{a(p+1)}(ax+b)^{p+1}+C \qquad (a\neq 0,\ p\neq -1)\,.$$

(b) Usa el resultado del inciso anterior para determinar las siguientes integrales:

i) $\int (2x+1)^4\ dx.$

ii) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4-x}}.$

CÁLCULO III
TAREA 2
SUMAS FINITAS. SUMAS DE RIEMANN. INTEGRAL DEFINIDA.
(Tema 1.2)

1. Desarrolla las siguientes sumas:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k 2^{k-1}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cos(ix)$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=j}^{j+2} n^2$.

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$.

2. Escribe cada suma en la notación $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$, con $k_0 = 1$:

   (a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{50}$.

   (b) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\cdots-\dfrac{1}{15}$.

   (c) $-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{5}$.

   (d) $x^{-2}+x^{-1}+x^0+x^1$.

3. Escribe $\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\sqrt{6}$ en la notación $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$, con:
   i) $k_0 = 1$, ii) $k_0 = 3$, iii) $k_0 = -5$.

4. Calcula las siguientes sumas:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k(1+3k)$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{99}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$.

   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j)$.

5. Determina el valor del entero positivo n tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

6. Para los valores $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, calcula:

   (a) La media $\mu = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i$.

   (b) La varianza $\sigma^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2$.

7. Demuestra que para todo $r \neq 1$ y $n \geq 1$ se cumple:

   (a) $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$. Suma geométrica

   (b) $\sum_{k=0}^{n-1} kr^k = \frac{r\left[1 - nr^{n-1} + (n-1)r^n\right]}{(1-r)^2}$. Suma aritmético-geométrica

   Sugerencia: $\frac{d}{dr}\left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} kr^{k-1}$

   (c) $\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd)r^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + \frac{rd\left[1 - nr^{n-1} + (n-1)r^n\right]}{(1-r)^2}$.

8. Calcula las siguientes sumas:

   (a) $\sum_{k=0}^{99} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

   (b) $\sum_{k=1}^{100} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

   (c) $\sum_{k=1}^{40} \left[\frac{2^k}{(-3)^k} + 5\right]$.

   (d) $\sum_{k=1}^{40} \frac{2^k}{(-3)^k} + 5$.

   (e) $\sum_{k=0}^{99} \frac{k}{2^k}$.

9. Expresa cada límite como una integral definida, si P es una partición del intervalo dado:

   (a) $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(2c_k^2 - 5c_k\right) \Delta x_k$, en $[0,1]$.

   (b) $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2}\, \Delta x_k$, en $[0,1]$.

(c) $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(c_k)\, \Delta x_k$, en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

10. Expresa cada límite como una integral definida:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{3k}{n}\right)^2 \left(\frac{3}{n}\right)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(2+\frac{4k}{n}\right)^2 \left(\frac{4}{n}\right)$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[4-\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^2\right] \left(\frac{3}{n}\right)$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3/n}{1+3k/n}$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2}$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5}$.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^5 + \left(\frac{2}{n}\right)^5 + \left(\frac{3}{n}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^5\right]$.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3/n}{\sqrt{2+5k/n}}$.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3/n}{\left(\sqrt{2+3k/n}\right)(3k/n)}$.

11. Calcula $\int\limits_0^1 (2x)\ dx$, utilizando sumas de Riemann.

12. En cada inciso grafica el integrando y utiliza un razonamiento geométrico para calcular la integral:

(a) $\int\limits_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\ dx$.

(b) $\int\limits_{-1}^{1} (1-|x|)\ dx$.

(c) $\int\limits_{0}^{5} f(x)\ dx$, si $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 3 \\ 3, & 3 \le x \le 5. \end{cases}$

13. Sea f continua y tal que $\int\limits_1^5 f(x)\ dx = -1$ y $\int\limits_3^5 f(x)\ dx = 4$. Encuentra:

(a) $\int\limits_1^5 f(u)\ du$. (b) $\int\limits_1^1 f(x)\ dx$. (c) $\int\limits_5^1 [-3f(t)]\ dt$. (d) $\int\limits_1^3 f(x)\ dx$.

14. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

(a) Si f es continua y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$.

(b) Si $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$, entonces $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

(c) Si $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

(d) Si $f(x) \geq 0$ y $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

(e) Si $\int_a^b f(x)\ dx > \int_a^b g(x)\ dx$, entonces $\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx > 0$.

(f) Si f y g son continuas y $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| > \left|\int_a^b g(x)\ dx\right|$.

15. Usando la desigualdad max-min, encuentra cotas superior e inferior para el valor de $\int\limits_1^3 \frac{1}{1+x^2}\ dx$.

16. Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\int\limits_1^3 \pi\ dx$.

(b) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} (-3x)\ dx$.

(c) $\int\limits_{-1}^{0} \left[x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right]\ dx$.

CÁLCULO III
TAREA 3
TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. SUSTITUCIÓN EN INTEGRAL DEFINIDA
(Temas 1.3-1.4)

1. En cada inciso encuentra $\dfrac{dG(x)}{dx}$:

   (a) $G(x) = \int_{1}^{x} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (b) $G(x) = \int_{x}^{1} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (c) $G(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (d) $G(x) = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (e) $G(x) = \int_{-1}^{x} x^2\sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (f) $G(x) = \int_{0}^{sen\, x} \left(u^2 + sen\, u\right)\, du.$

   (g) $G(x) = \int_{x}^{x^3} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (h) $G(x) = \int_{0}^{x} \left(x^2+t^3\right)^9\, dt.$

   (i) $G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \cos(t^2 - x^4)\, dt.$

2. Halla la derivada de la función en cada inciso. De ser posible, simplifica tu respuesta:

   (a) $r(\theta) = \int_{e^{\sqrt{\theta}}}^{e^{3\theta}} \ln t\, dt.$

   (b) $\alpha(u) = \int_{0}^{\ln u} sen\left(e^x\right)\, dx.$

   (c) $G(x) = \int_{0}^{2\ln x} \left(e^t + t^2\right)\, dt, \quad x > 1.$

   (d) $x(y) = \int_{0}^{y} y^2 \left(\dfrac{1}{1+s^3}\right)\, ds.$

   (e) $x(t) = \int_{0}^{t} e^{\left(t^2 - z^2\right)}\, dz.$

3. Sea $f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\, dt$, con $x > 0$. Demuestra que f es constante.

4. Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\; dt$, con a una constante. Encuentra una expresión para: a) $dG(x)/dx$, b) $G(x^2)$, c) $dG(x^2)/dx$.

5. Sea $F(x) = \int_4^{x^2} e^{\sqrt{t}}\, dt$, para todo $x \geq 2$. Calcula: a) $F(2)$, b) $F'(2)$, c) $F''(2)$.

6. Supón que $f(x)$ tiene una derivada positiva para todos los valores de x, y que $f(1) = 0$. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\; dt$. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para $g(x)$?

   (a) g es una función diferenciable de x.
   (b) g es una función continua de x.
   (c) La gráfica de g tiene una tangente horizontal en $x = 1$.
   (d) g tiene un máximo local en $x = 1$.
   (e) La gráfica de $\frac{dg}{dx}$ cruza el eje x en $x = 1$.

7. El precio $P(t)$ de una maquinaria al tiempo $0 \leq t \leq 20$ es $P(t) = \int_t^{20} v(s)\, e^{r(t-s)}\, ds$, donde r es la tasa de descuento (constante) y $v(s)$ es la renta de la maquinaria al tiempo s. Demuestra que $P(t)$ satisface la ecuación $\frac{dP(t)}{dt} = -v(t) + rP(t)$.

8. Encuentra una función $F(x)$ tal que $F'(x) = \sqrt{5 + e^{x^2}}$ y $F(2) = 7$. Sugerencia: la función $\sqrt{5 + e^{x^2}}$ no posee una antiderivada simple, de modo que F debe quedar expresada en términos de una integral definida con límites variables.

9. Encuentra la solución formal al problema de condiciones iniciales $\frac{dx(t)}{dt} = t^2 f(t)$, $x(3) = 5$, en donde $f(t)$ es una función continua (desconocida).

10. Las reservas de divisas de un país al tiempo t están representadas por una función diferenciable $F(t)$, de modo que el flujo de divisas es $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$. Al tiempo $t = t_0$ se cuenta con una reserva de K divisas. Encuentra $F(t)$ en términos de f y K.

11. Calcula las siguientes integrales definidas:

   (a) $\int_{-8}^{-1} \left(5x^{2/3} - 5 - \frac{8}{x^2}\right) dx$.
   (b) $\int_{-2}^{-1} \frac{y^5+1}{y^3}\, dy$.

(c) $\int\limits_{0}^{1} (x^2+2x)^2 \ dx.$

(d) $\int\limits_{-\ln 3}^{\ln 3} (e^x+1) \ dx.$

(e) $\int\limits_{-4}^{0} |x+1| \ dx.$

12. Calcula las siguientes integrales, usando el método de sustitución para integrales definidas:

(a) $\int\limits_{1}^{3} \sqrt{6-2x}\, dx.$

(b) $\int\limits_{1}^{x} \dfrac{t^2}{\sqrt{t^3+3}}\, dt.$

(c) $\int\limits_{1}^{3} \dfrac{x^2+1}{x^3+3x}\, dx.$

(d) $\int\limits_{1}^{4} \dfrac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}.$

(e) $\int\limits_{0}^{3} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx.$

(f) $\int\limits_{-4\ln 3}^{0} \sqrt{e^x}\, dx.$

(g) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \dfrac{e^{3x}\, dx}{2e^{3x}-1}.$

(h) $\int\limits_{1}^{e} \dfrac{dx}{x\,(\ln x+1)}.$

(i) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4} \dfrac{\cos(2\theta)}{sen^3(2\theta)}\, d\theta.$

(j) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{5\, sen\, x\ \cos x}{(1+sen^2 x)^2}\, dx.$

13. Demuestra que si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

(a) $\int_a^b \ f(x)\ dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} \ f(x-\lambda) dx$

(b) $\int_a^b \ f(x)\ dx = \dfrac{1}{\lambda}\ \int_{\lambda a}^{\lambda b} \ f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\ dx$

CÁLCULO III
TAREA 4
ÁREA. VALOR PROMEDIO. LONGITUD DE CURVA
(Tema 1.5)

1. Encuentra el área A entre la curva y el eje x en el intervalo dado:

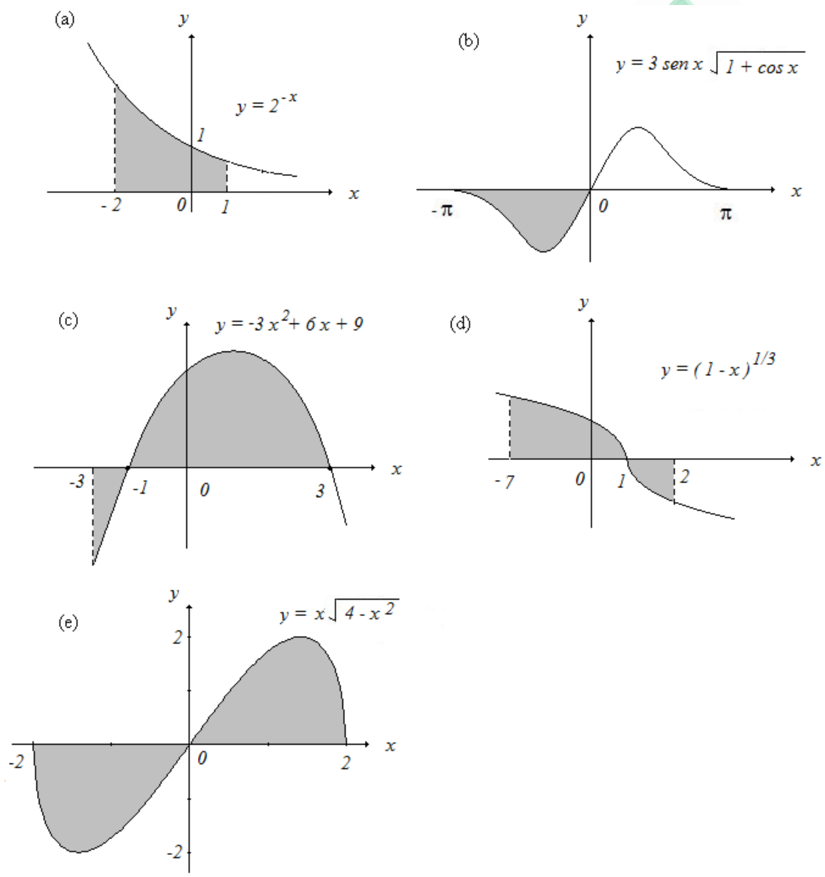
   (a) $y = 2^{-x}, \quad -2 \leq x \leq 1.$

   (b) $y = 3\, sen\, x \sqrt{1 + \cos x}, \quad -\pi \leq x \leq 0.$

   (c) $y = -3x^2 + 6x + 9, \quad -3 \leq x \leq 3.$

   (d) $y = (1 - x)^{1/3}, \quad -7 \leq x \leq 2.$

   (e) $y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2.$



2. Encuentra el área A entre las siguientes curvas en el intervalo dado:

   (a) $y = \ln x$ y $y = \ln(2x), \quad 1 \leq x \leq 5.$

   (b) $y = 2\, sen\, x$ y $y = sen\,(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$

   (c) $y = x^2$ y $y = -2x^4, \quad -1 \leq x \leq 1.$

   (d) $y = 4 - x^2$ y $y = 2 - x, \quad -2 \leq x \leq 3.$

   (e) $x + y^2 = 3$ y $4x + y^2 = 0, \quad -2 \leq y \leq 2.$

3. Encuentra el área A de la región finita entre las siguientes curvas:

   (a) $y = 2 - x^2$ y $y = x$.

   (b) $y = \sqrt{|x|}$ y $5y = x + 6$.

4. Encuentra el área A de la región finita entre la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -1$:

   (a) Integrando con respecto a x.

   (b) Integrando con respecto a y.

5. Encuentra el área A de la región entre las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ y el eje x:

   (a) Integrando con respecto a x.

   (b) Integrando con respecto a y.

6. En un modelo de demanda y oferta, sea p el precio unitario y q el producto en miles de unidades. Determina el excedente del consumidor EC y el excedente del productor EP, si las funciones de demanda y oferta son, respectivamente, $p = 144 - q^2$ y $p = 48 + \frac{q^2}{2}$.

7. En cada inciso grafica la función y encuentra su valor promedio sobre el intervalo dado. En qué punto(s) del intervalo la función toma su valor promedio?:

   (a) $f(x) = x^2 - 1$, en el intervalo $\left[0, \sqrt{3}\right]$.

   (b) $f(x) = |x - 1|$, en el intervalo $[-1, 2]$.

8. Supón que f es continua y que $\int_1^2 f(x)\, dx = 4$. Muestra que $f(x) = 4$ al menos una vez en el intervalo $[1, 2]$. (Sugerencia: utiliza el Teorema del Valor Medio para integrales.)

9. Por medio de una integración en x encuentra la longitud L del segmento de la recta $y = 3x + 5$ entre $x = 1$ y $x = 4$. Comprueba tu resultado mediante la fórmula de la distancia.

10. Encuentra la longitud L de la curva $y = 2x^{3/2}$ entre $x = 1/3$ y $x = 7$.

CÁLCULO III
TAREA 5
INTEGRALES RELACIONADAS CON LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS
(Tema 1.6)

1. Sin usar calculadora, encuentra el valor de $\sec\left(sen^{-1}(3/4)\right)$. Ilustra tu respuesta con un triángulo rectángulo.

2. Despeja y en la expresión $\log_5(2x+\tan^{-1}y)-\log_5 x=1$.

3. En los siguientes incisos encuentra dy/dx :

   (a) $y = sen^{-1}\left(\sqrt{2}\,x\right)$.

   (b) $y=\cot^{-1}(1/x)-\tan^{-1}x$.

   (c) $y=\ln\left(\tan^{-1}x\right)$.

   (d) $y=e^{\tan^{-1}\left(x^5\right)}$.

   (e) $y=\csc^{-1}(e^x)$.

4. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

   (b) $\int \dfrac{dy}{\sqrt{3+4y-4y^2}}$.

   (c) $\int \dfrac{e^t\,dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$.

   (d) $\int \dfrac{dt}{7+3t^2}$.

   (e) $\int \dfrac{sen\,\theta\,d\theta}{1+\cos^2\theta}$.

   (f) $\int \dfrac{3^x\,dx}{1+3^{2x}}$.

   (g) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{5x^2-2}}$.

   (h) $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$.

   (i) $\int \dfrac{e^{sen^{-1}x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Calcula las siguientes integrales definidas:

   (a) $\int\limits_0^1 \dfrac{4\ dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

   (b) $\int\limits_1^e \dfrac{dt}{t\left(1+\ln^2 t\right)}$.

   (c) $\int\limits_1^2 \dfrac{8\ dt}{t^2-2t+2}$.

   (d) $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \dfrac{\sec^2(\sec^{-1} x)\ dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6. ¿Es posible que las siguientes integrales sean ambas correctas? Justifica.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sen^{-1}x + C \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C.$$

CÁLCULO III
TAREA 6
TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN
(Tema 1.7)

1. Encuentra las siguientes integrales, utilizando el método de sustitución:

   (a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{4+9e^{2x}}$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{e^{x}\,dx}{4+9e^{2x}}$.

   (c) $\displaystyle\int_{2}^{16} \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\,dx$.

   (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

   (f) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x+4x\ln^2 x}\,dx$.

   (g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

   (h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

2. Encuentra las siguientes integrales, utilizando procedimientos algebraicos:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\,dx$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$.

   (c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$.

   (d) $\displaystyle\int (\sec x+\cot x)^2\,dx$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+sen\,x}\,dx$.

   (f) $\displaystyle\int \frac{1-sen\,\theta}{\cos\theta}\,d\theta$.

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx.$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx.$

(i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx.$

(j) $\displaystyle\frac{1}{2}\int \sqrt{e^x-1}\,dx.$

(k) $\displaystyle\int \frac{8}{t^2-2t+2}\,dt.$

3. Encuentra las siguientes integrales, utilizando el método de integración por partes:

(a) $\displaystyle\int x\,sen\,(3x)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x/2}\,dx.$

(c) $\displaystyle\int x^2e^{-x/2}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_1^e \ln\sqrt{x}\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx.$

(f) $\displaystyle\int \cos x\;\ln\left(senx\right)\,dx.$

(g) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-e^x}}.$

(h) $\displaystyle\int \tan^{-1}(x)\,dx.$

(i) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx.$

(j) $\displaystyle\int sen\,(\ln x)\,dx.$

(k) $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,dx.$

4. Encuentra las siguientes integrales indefinidas, utilizando el método de fracciones parciales:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x+6}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x^3}\,dx.$

   (e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx.$

   (f) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-x}\,dx.$

5. Encuentra las siguientes integrales, utilizando el método que consideres apropiado:

   (a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

   (c) $\displaystyle\int \frac{sen\, x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx.$

   (e) $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)\,dx.$

   (f) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+1}.$

   (g) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx.$

   (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

   (i) $\displaystyle\int sen^{-1}(x)\,dx.$

(j) $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x+1}}$.

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4x\sqrt{x}}$.

(l) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

(m) $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{3-2z-z^2}}$.

(n) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\ dx$.

(o) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2-1}{x^3+x}\ dx$.

(p) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\ dx$.

CÁLCULO III
TAREA 7
FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE L´HOPITAL
(Tema 2.1)

1. Utiliza la regla de L'Hopital (en donde corresponda) para calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3}$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-1}{2^x-1}$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{2x^2}$.

   (e) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t\,sen\,t}{1-\cos t}$.

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3^x}{x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{ax+x^2}-a}{x}, \quad a>0$.

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \sqrt{1+sen\,t}\,dt}{x}$.

   (i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\int_2^{2x} e^{4x-t^2}\,dt}{x-1}$.

   (j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-8x^2}{12x^2+5}$.

   (k) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{100}}{e^x}$.

   (l) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{1/10}}{\ln x}$.

   (m) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x^2+2x)}{\ln x}$.

   (n) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\ln x}{\ln(\ln x)}$.

   (o) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2 e^{-x}\right)$.

   (p) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x e^{1/x}\right)$.

   (q) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x e^{-1/x}\right)$.

   (r) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[x\ln(1+3/x)\right]$.

   (s) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[e^x \ln(1+e^{-x})\right]$.

(t) $\lim_{x \to 0^+} (x^2 \ln x)$.

(u) $\lim_{x \to \infty} (x^2 \ln x)$.

(v) $\lim_{x \to 0^+} [\ln x - \ln (sen\, x)]$.

(w) $\lim_{x \to \infty} [\ln (2x) - \ln (x+1)]$.

(x) $\lim_{x \to 0^+} [\ln (2x) - \ln (x+1)]$.

2. Trata de calcular $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\cot x}{\csc x}$, utilizando la regla de L'Hopital (¿qué notas de especial?). Luego calcula ese límite utilizando identidades trigonométricas.

3. Calcula los siguientes límites, utilizando la regla de L'Hopital en donde corresponda:

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^{2/x}$.

(b) $\lim_{x \to 1^+} x^{1/(x-1)}$.

(c) $\lim_{x \to \infty} (\ln x)^{1/x}$.

(d) $\lim_{x \to \infty} x^{1/\ln x}$.

(e) $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

(f) $\lim_{x \to 0^+} (e^x + x)^{1/x}$.

(g) $\lim_{x \to 0^+} (1 + 2x)^{1/(3x)}$.

(h) $\lim_{x \to \infty} (1 + 2x)^{1/(2 \ln x)}$.

(i) $\lim_{x \to 0^+} (1 + 2x)^{1/(2 \ln x)}$.

(j) $\lim_{x \to \infty} (2^x + 1)^{1/x}$.

4. Demuestra que $\lim_{a \to 1} \dfrac{x^{1-a} - 1}{1-a} = \ln x$, para todo $x > 0$.

5. Demuestra que $\lim_{k \to \infty} A_0 \left(1 + \dfrac{r}{k}\right)^{kt} = A_0 e^{rt}$.

6. Sean $c_i, x_i > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Demuestra que si $c_1 + c_2 + ... + c_n = 1$, entonces

$$\lim_{t \to 0^+} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^t \right)^{1/t} = x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{c_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_i}.$$

El objetivo de este ejercicio es mostrar que en límite $t \to 0^+$ la función $\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^t \right)^{1/t}$ se convierte en la función Cobb-Douglas $\prod_{i=1}^{n} x_i^{c_i}$.

7. Sea $f(\sigma, v) = \dfrac{\left[\left(\gamma h^{1-\frac{1}{v}} + c^{1-\frac{1}{v}}\right)^{\frac{v}{v-1}}\right]^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma}$, con $\gamma, h, c > 0$ constantes y $\sigma, v \neq 1$.

(a) Aplica a f la transformación monotónica $y(\sigma, v) = f(\sigma, v) - \dfrac{1}{1-1/\sigma}$ y demuestra que

$$\lim_{\sigma \to 1} y(\sigma, v) = \ln\left(\gamma h^{1-\frac{1}{v}} + c^{1-\frac{1}{v}}\right)^{\frac{v}{v-1}}.$$

(b) Aplica a f la transformación monotónica $y(\sigma, v) = \left(\dfrac{1}{1+\gamma}\right)^{\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\left(\frac{v}{v-1}\right)} f(\sigma, v)$ y demuestra que

$$\lim_{v \to 1} y(\sigma, v) = \frac{1}{1-1/\sigma}\left(h^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} c^{\frac{1}{1+\gamma}}\right)^{1-1/\sigma}.$$

CÁLCULO III
TAREA 8
INTEGRALES IMPROPIAS
(Tema 2.2)

1. Calcula las siguientes integrales impropias de dominio infinito:

   (a) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^5}$.

   (b) $\int_{2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$.

   (c) $\int_{\beta}^{\infty} \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{y^{\alpha+1}}\, dy, \quad \alpha, \beta > 0$.

   (d) $\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\, dx$.

   (e) $\int_{-\infty}^{0} xe^{x/2}\, dx$.

   (f) $\int_{4}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$.

   (g) $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

   (h) $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\, d\theta}{1+e^{-\theta}}$.

   (i) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\,(3x+1)}$.

   (j) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

2. Calcula las siguientes integrales impropias de rango infinito:

   (a) $\int_{2}^{10} \frac{dt}{\sqrt{2t-4}}$.

   (b) $\int_{-3}^{-2} \frac{dt}{(6+3t)^2}$.

   (c) $\int_{0}^{1/\ln 2} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx$.

   (d) $\int_{0}^{1} x \ln x\, dx$.

   (e) $\int_{0}^{2} \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\, ds$.

(f) $\int\limits_{-1}^{8} \dfrac{dx}{x^{1/3}}$.

(g) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x^5}$.

(h) $\int\limits_{e^{-1}}^{e} \dfrac{dx}{x(\ln x)^3}$.

(i) $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$.

3. Encuentra los valores de p para los que converge la integral en cada inciso:

   (a) $\int\limits_{1}^{e} \dfrac{dx}{x(\ln x)^p}$.

   (b) $\int\limits_{e}^{\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^p}$.

4. (a) Muestra que si f es par, y la integral existe, entonces $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\ dx$.

   (b) Muestra que si f es impar, y la integral existe, entonces $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 0$.

5. Considera la densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, en donde f salisface $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$. Para esta función, calcula:

   (a) La media $\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ dx$.

   (b) La varianza $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ dx\right)^2$.

6. En la teoría de la probabilidad, los tiempos de espera tienden a satisfacer una densidad de probabilidad exponencial de la forma $f(x) = \dfrac{1}{a} e^{-x/a}$, con $a > 0$, sobre el intervalo $[0, \infty)$. Para esta función, calcula:

   (a) $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\ dx$.

   (b) $\int\limits_{0}^{\infty} x f(x)\ dx$.

   (c) $\int\limits_{0}^{\infty} (x-a) f(x)\ dx$.

   (d) $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 f(x)\ dx$.

(e) $\int\limits_0^\infty (x-a)^2 f(x)\ dx$.

7. La integral $m(t) = \int\limits_0^\infty e^{tx} \left(\frac{e^{-x/4}}{4}\right) dx$ se conoce como la función generadora de momentos para la densidad de probabilidad exponencial $f(x) = \frac{1}{a} e^{-x/a}$ con $a = 4$. Determina para qué valores de t converge esta integral y a qué función converge.

8. La función gamma se define como $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\ dy$, para $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Demuestra que $\Gamma(1) = 1$.

   (b) Integrando por partes demuestra que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$, para toda, $\alpha \geq 1$.

   (c) Demuestra que si $n \in Z^+$ entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$

9. Una variable aleatoria Y tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha, \beta > 0$, si su función de densidad es $f(y) = \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$, sobre el intervalo $[0, \infty)$. Demuestra que:

   (a) $\int\limits_0^\infty f(y)\ dy = 1$.

   (b) $\int\limits_0^\infty y f(y)\ dy = \alpha\beta$.

   (c) $\int\limits_0^\infty y^2 f(y)\ dy = \alpha(\alpha+1)\beta^2$.

10. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = e^{-2|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Encuentra la función de distribución acumulada de X, definida por $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$.

CÁLCULO III
TAREA 9
INTEGRACIÓN MÚLTIPLE
(Temas 3.1-3.7)

1. Evalúa las siguientes integrales dobles:

   (a) $\int_0^3 \int_{-1}^0 (x^2y - 2xy)\ dydx.$

   (b) $\int_0^3 \int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\ dxdy.$

   (c) $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{2x+y}\ dydx.$

   (d) $\int_0^1 \int_0^1 xe^{xy}\ dydx.$

2. Calcula las siguientes integrales dobles:

   (a) $\int\int_R \left((3^x+1)^2 - 1\right) dA$, donde R es la región definida por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \ln 3$.

   (b) $\int\int_R \frac{e^{4x}}{x}\ dA$, donde R es la región definida por $1 \le x \le 2$, $-2x \le y \le 2x$.

   (c) $\int\int_R e^{x^2}\ dA$, donde R es la región definida por $0 \le x \le 1$, $1-x \le y \le 1+x$.

   (d) $\int\int_R \frac{1}{1+y^2}\ dA$, donde R es la región definida por $y \le x \le 3y$, $0 \le y \le 1$.

   (e) $\int\int_R \frac{1}{2x+x^2}\ dA$, donde R es la región entre el eje x y la recta $y = 1+x$, en el intervalo $1 \le x \le 3$.

3. Dibuja la región de integración R y evalúa la integral:

   (a) $\int_1^2 \int_0^{x-1} y\ dydx.$

   (b) $\int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\ dydx.$

   (c) $\int_1^3 \int_{-y}^{2y} xe^{y^3}\ dxdy.$

   (d) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\ dydx.$

   (e) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y\ dxdy.$

(f) $\int_{1}^{\ln 8} \int_{0}^{\ln y} e^{x+y}\ dxdy.$

4. Dibuja la región de integración R e invierte la integral:

(a) $\int_{0}^{1} \int_{2}^{4-2x} f(x,y)\ dydx.$

(b) $\int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dxdy.$

(c) $\int_{1}^{2} \int_{x-2}^{2-x} f(x,y)\ dydx.$

(d) $\int_{2}^{4} \int_{2-x}^{x-2} f(x,y)\ dydx.$

(e) $\int_{0}^{\ln 2} \int_{0}^{e^{-x}} f(x,y)\ dydx.$

(f) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{y} f(x,y)\ dxdy + \int_{1}^{2} \int_{0}^{2-y} f(x,y)\ dxdy.$

(g) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} f(x,y)\ dydx + \int_{1}^{e} \int_{\ln x}^{1} f(x,y)\ dydx.$

(h) $\int_{0}^{1} \int_{1-y}^{1} f(x,y)\ dxdy + \int_{1}^{2} \int_{y-1}^{1} f(x,y)\ dxdy.$

5. Determina el orden de integración y evalúa la integral:

(a) $\int_{0}^{4} \int_{\sqrt{x}}^{2} \frac{3}{y^3+1}\ dydx.$

(b) $\int_{0}^{1} \int_{y}^{1} \frac{2x}{x^3+1}\ dxdy.$

(c) $\int_{0}^{1} \int_{\sqrt[3]{x}}^{1} 4y^4 e^{xy}\ dydx.$

(d) $\int_{0}^{1} \int_{y}^{1} e^{x^2}\ dxdy.$

6. En cada inciso calcula el área A_R de la región R y luego calcula el promedio $\overline{f}$ de la función f a lo largo de esa región:

(a) $R:\ 1 \leq x \leq e,\ 1 \leq y \leq e, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{xy}.$

(b) $R:\ 1 \leq x \leq e,\ \dfrac{1}{x} \leq y \leq \dfrac{3}{x}, \quad f(x,y) = e^{xy}.$

(c) $R: \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2, \quad f(x,y) = 3x^3 e^{xy}$.

7. Sea $P(L,K) = L^{1/2}K^{1/2}$ una función de producción Cobb-Douglas, donde L y K denotan el trabajo y el capital, respectivamente. Calcula la producción promedio $\overline{P}$ a lo largo de la región $0 \leq L \leq 1$, $0 \leq K \leq 4$.

8. Transforma la integral $\int_0^1 \int_{-x}^{x} dydx$ en una nueva integral con $dvdu$, usando la sustitución $u = x + y$, $v = x - y$.

9. Transforma a coordenadas polares y evalúa las siguientes integrales:

(a) $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$.

(b) $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dydx$.

(c) $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$.

(d) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dydx$.

(e) $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dydx$.

(f) $\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} 8xy \, dydx$.

(g) $\int_{0}^{6} \int_{0}^{y} x \, dxdy$.

(h) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} dxdy$.

(i) $\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy$.

(j) $\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} dydx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dydx$.

10. Transforma las siguientes integrales a coordenadas rectangulares (no evalúes):

(a) $\int_{0}^{\pi/4} \int_{0}^{1} r \, drd\theta$.

(b) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{1}^{1/sen\theta} 3r^2 \cos\theta \, drd\theta$.

11. Dibuja la región de integración R y evalúa las siguientes integrales impropias:

   (a) $\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-x^2}\, dydx.$

   (b) $\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-x}\, dydx.$

   (c) $\int_0^{\infty}\int_{0.2}^{0.4} 5xe^{-xy}\, dxdy.$

   (d) $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xe^{-(x+2y)}\, dxdy.$

   (e) $\int_0^{1}\int_x^{1} \frac{sen\, y}{y}\, dydx.$

   (f) $\int_0^{2}\int_0^{4-y^2} \frac{2ye^x}{4-x}\, dxdy.$

   (g) $\int_{-2}^{0}\int_{-y/2}^{1} \frac{e^{4x}}{x}\, dxdy + \int_0^{2}\int_{y/2}^{1} \frac{e^{4x}}{x}\, dxdy.$

12. Transforma a coordenadas polares para evaluar las siguientes integrales impropias:

   (a) $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dydx.$

   (b) $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} dydx.$

13. Calcula la integral triple $\int_1^{e}\int_1^{e}\int_1^{e} \frac{1}{xyz}\, dxdydz.$

14. Plantea (no calcules) una integral triple para calcular el volumen V_R de la región finita R entre el plano xy y la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.

15. Plantea (no calcules) una integral triple para calcular el volumen V_R de la región R en el primer octante limitada por los planos coordenados y el plano $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

16. Plantea (no calcules) una integral triple para calcular el volumen V_R de la región R entre el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y la esfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

CÁLCULO III
TAREA 10
SUCESIONES
(Temas 4.1-4.3)

1. Encuentra los primeros cinco elementos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$de cada sucesión $(n \geq 1)$:

   (a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$

   (b) $a_n = 2 + (-1)^n$.

   (c) $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$.

   (d) $a_n = \dfrac{1-n}{n^2}$.

2. Usa el método de iteración para encontrar los primeros cinco elementos, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, de las siguientes relaciones de recurrencia $(n \geq 1)$:

   (a) $a_{n+1} = (n+1)\, a_n, \;\; a_1 = 1$.

   (b) $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}, \;\; a_1 = 2, \;\; a_2 = -1$.

3. Encuentra una regla para el n-ésimo término, a_n, de las siguientes sucesiones:

   (a) $1, -1, 1, -1, 1, ...$

   (b) $-1, 1, -1, 1, -1...$

   (c) $1, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, ...$

   (d) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...$

   (e) $1, -3, 5, -7, 9, -11, ...$

4. Calcula el límite de la sucesión $\{a_n\}$, o justifica si éste no existe:

   (a) $a_n = \ln(3e^n) - n$.

   (b) $a_n = \dfrac{sen\, n}{n}$.

   (c) $a_n = ((-1)^n + 1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

   (d) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$.

   (e) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{3n^2}{n^2+1}\right)$.

   (f) $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$.

   (g) $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln(\ln n)}$.

(h) $a_n = \dfrac{\int_0^n \ \ln\left(2+e^{-x}\right) \ dx}{n}$.

(i) $a_n = \dfrac{\int_0^{2n} \ e^{x^3} \ dx}{\int_0^n \ e^{8x^3} \ dx}$.

(j) $a_n = \sqrt{\dfrac{1+2n}{3+5n}}$.

(k) $a_n = \ln n - \ln(n+1)$.

(l) $a_n = \dfrac{\ln(n^3)}{n}$.

(m) $a_n = \dfrac{2^n-1}{3^n}$.

(n) $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$.

(o) $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$.

(p) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(q) $a_n = n\ln\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)$.

(r) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

(s) $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$.

(t) $a_n = n\left(1-\cos(1/n)\right)$.

(u) $a_n = n\left(3^{1/n}-1\right)$.

(v) $a_n = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n/2}$.

(w) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^2\,(2n-2)!}$.

CÁLCULO III
TAREA 11
SERIES
(Temas 5.1-5.4)

1. Identifica cuáles de las siguientes sumas infinitas son series geométricas. Para cada serie geométrica calcula la suma, o justifica si ésta diverge:

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$.

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$.

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2/n}$.

   (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n/2}$.

   (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\ln 2)^n$.

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln 2)^{1-n}$.

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

   (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$.

2. Determina el valor de las siguientes sumas infinitas:

   (a) $2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \cdots$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{5}{(-6)^n}$.

   (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{(-6)}{3^n}$.

   (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n} 8^{1-n}$

   (e) $ce^{-r} + ce^{-2r} + ce^{-3r} + ce^{-4r} + \cdots, \quad r > 0$.

   (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r(1-r)^n, \quad 0 < r < 2$.

   (g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1+g)^n D}{(1+r)^{n+1}}, \quad 0 < g < r,\ D > 0$.

   (h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1+r)^{1-k} (1+r)^2 \gamma^k, \quad 0 < \gamma < 1 + r,\ r > 0$.

3. Para cada una de las siguientes series geométricas encuentra el intervalo de valores de x en donde converge, así como el valor de la suma (en función de x):

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}, \quad x \neq 0.$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n, \quad x > 0.$

4. Demuestra que para $|r| < 1$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a+kd)r^k = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2}.$$

   Sugerencia: Utiliza el resultado 7c de la tarea 2 para $\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd)r^k$.

5. Encuentra el valor de las siguientes series telescópicas:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$

   (b) $\sum_{n=-2}^{\infty}\left(e^{-n} - e^{1-n}\right).$

6. Utiliza la prueba del n-ésimo término para demostrar que las siguientes series divergen:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2/n}}.$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n}\right).$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n.$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi).$

7. Utiliza la prueba del cociente, o la prueba de la raíz n-ésima, para determinar si las siguientes series convergen o divergen:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}.$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$.

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\, n!\, 3^n}$.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$.

8. Utiliza la prueba de la comparación con integrales para identificar cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+1)^2}$.

9. Utiliza la prueba de la comparación directa para determinar si las siguientes series convergen o divergen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$. Sugerencia: $\frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$. Sugerencia: $\frac{3}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{3}{n+n} = \frac{3}{2n} > \frac{1}{n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{5/2}}$. Sugerencia: $\frac{n+1}{n^{5/2}} \leq \frac{n+n}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{3/2}} < \frac{3}{n^{3/2}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Sugerencia: $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$. Sugerencia: $\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$. Sugerencia: $\ln(\ln n) < \ln n < n$, para $n \geq 3$.

10. Utiliza la prueba de la comparación de límites para determinar si las siguientes series convergen o divergen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 1}$. Sugerencia: $b_n = \frac{1}{3^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$. Sugerencia: $b_n = \frac{1}{n^2}$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln n}$. Sugerencia: $b_n = \frac{1}{n}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$. Sugerencia: $b_n = \frac{1}{n^2}$.

11. Determina cuáles de las siguientes series de signos alternantes convergen absolutamente, cuáles convergen condicionalmente y cuáles divergen:

(a) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \frac{1}{625} - \cdots$.

(b) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots$.

(c) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{\ln n^2}\right)^n$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$.

12. Utiliza alguno de los criterios anteriores para determinar cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^3}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{-n}}$.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$.

(h) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^n}$.

(k) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$.

(l) $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$

13. Encuentra el radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{n2^n}$.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

14. En cada inciso encuentra la serie de Taylor generada por f alrededor de $x = x_0$, así como el polinomio de Taylor correspondiente de orden 2, $P_2(x)$:

(a) $f(x) = e^{-2x}, \quad x_0 = 0$.

(b) $f(x) = e^x, \quad x_0 = -3$.

(c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x + 4, \quad x_0 = 0$.

15. En cada inciso encuentra una aproximación cuadrática, $f(x) \cong P_2(x)$, de la función $f(x)$ alrededor de $x = x_0$:

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \qquad x_0 = 0.$

    (b) $f(x) = 1 + 2x, \qquad x_0 = 0.$

    (c) $f(x) = \ln(2+x), \qquad x_0 = -1.$

    (d) $f(x) = 2 + \int_3^{3x} e^{9-t^2}\, dt, \qquad x_0 = 1.$

16. (a) Encuentra una aproximación cuadrática, $f(x) \cong P_2(x)$, para $f(x) = \sqrt{4+x}$ alrededor de $x_0 = 0$.

    (b) Con el resultado del inciso (a) aproxima el valor de $\sqrt{4.2}$.

    (c) Con el resultado del inciso (a) encuentra una aproximación cuadrática para la función $f(x) = \sqrt{4+2x^2}$ alrededor de $x_0 = 0$.

17. (a) Encuentra una aproximación cuadrática, $f(x) \cong P_2(x)$, para $f(x) = e^x$ alrededor de $x_0 = 0$.

    (b) Con el resultado del inciso (a) aproxima el valor de $e^{0.15}$.

    (c) Con el resultado del inciso (a) encuentra una aproximación cuadrática para la función $f(x) = e^{-3x}$ alrededor de $x_0 = 0$.

18. La serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ alrededor de $x_0 = 0$ es $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. Utiliza esta información para calcular:

    (a) $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + + \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \dfrac{(\ln 2)^4}{4!} + \cdots .$

    (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$

19. En cada inciso encuentra el polinomio de Taylor de orden 2, $P_2(x, y)$, generado por f alrededor de (x_0, y_0):

    (a) $f(x, y) = e^x \ln(1+y), \qquad (x_0, y_0) = (0, 0).$

    (b) $f(x, y) = 3x^4 + 14x^3y + y^3x^2, \qquad (x_0, y_0) = (2, -1).$

    (c) $f(x, y) = \int\limits_x^{2y} e^{t^2}\, dt, \qquad (x_0, y_0) = (2, 1).$

20. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 2, $P_2(x, y)$, generado por la función $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 3y$ alrededor de su punto crítico.