CÁLCULO II
CUADERNO DE EJERCICIOS

Dra. Lorena Zogaib
Departamento de Matemáticas
ITAM

Agosto 6, 2015

INTRODUCCIÓN

Este documento constituye un material de apoyo para el curso de Cálculo II para las carreras de Economía y Dirección Financiera en el ITAM. Contiene una recopilación de ejercicios y aplicaciones, que complementan el documento de trabajo *Cálculo II, Notas de Clase*, Lorena Zogaib, Departamento de Matemáticas, ITAM, enero 12 de 2015.

Gran parte de estos ejercicios fueron tomados de la bibliografía del curso, así como del material utilizado por otros profesores, muy especialmente de mis queridos colegas Carmen López y Guillermo Pastor. La secuencia de los temas obedece al orden del temario vigente, por lo que se espera que el estudiante avance en las tareas a medida que se vaya cubriendo en clase el material correspondiente.

Con el fin de que el estudiante pueda verificar sus resultados, pongo a su disposición mis soluciones a estos ejercicios, que están publicadas en el documento de trabajo *Cálculo II, Cuaderno de Ejercicios, Soluciones,* Lorena Zogaib, Departamento de Matemáticas, ITAM, agosto 6 de 2015. Recomiendo ampliamente al lector consultar las soluciones sólo después de haber intentado resolver los ejercicios por sí mismo.

Para la elaboración de este documento conté con la colaboración de Alejandro Arriaga Vargas, que en ese momento era estudiante de Economía en el ITAM. Alejandro realizó una transcripción del texto en Word a su versión actual en Scientific WorkPlace.

Agradezco de antemano sus comentarios y correcciones en relación con este material.

Lorena Zogaib

CÁLCULO II
TAREA DE PRERREQUISITOS

1. Grafica las funciones $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \ln(-x)$, $f_3(x) = \ln|x|$, $f_4(x) = -\ln x$.

2. Grafica las funciones $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = e^{-|x|}$, $f_4(x) = -e^x$.

3. Escribe las propiedades de las funciones $\ln x$ y e^x.

4. Despeja y en $e^x + e^y = 4$ y luego grafica esta curva.

5. Resuelve para x :

   (a) $x^2 \geq 4$.
   (b) $\sqrt{3-2x} = x$
   (c) $(x-1)\, e^x = 0$.
   (d) $\ln x \leq 1$.

6. Encuentra la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ en cada inciso:

   (a) $y = \ln x^3 - \ln^3 x$.
   (b) $y = \dfrac{1}{\ln x}$.
   (c) $y = 2^{3x}$.
   (d) $y = (\ln x)^x$.
   (e) $y = \left(1 + 2^{1/x}\right)^x$.

7. ¿Verdadero o falso?:

   (a) $\sqrt{4} = \pm 2$
   (b) $\ln x^2 = 2\ln x$
   (c) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
   (d) $(\ln 8)^2 = 2\ln 8$
   (e) $\dfrac{1}{\ln x} = -\ln x$.
   (f) $x^{1/2} = \dfrac{1}{x^2}$.
   (g) $e^{x - 2\ln x} = \dfrac{e^x}{x^2}$.
   (h) $\sqrt{e^{x^2}} = e^x$.
   (i) $\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 = e^x$.

CÁLCULO II
TAREA 1
VECTORES. OPERACIONES CON VECTORES
(Tema 1.1)

1. Encuentra un vector $\overrightarrow{b}$ con dirección opuesta a $\overrightarrow{a} = -\widehat{i} + 2\widehat{j}$, que tenga: a) magnitud 2, b) el doble de la magnitud de $\overrightarrow{a}$.

2. Encuentra los puntos A y B, si $\overrightarrow{v}$ representa el vector $\overrightarrow{AB}$, con $\overrightarrow{v} = 4\widehat{i} - 6\widehat{j}$, y el punto medio del segmento de recta entre A y B es $P(3, -1)$.

3. Si $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3)$ y $\overrightarrow{b} = (4, -1, 1)$ calcula: a) $\left\|\overrightarrow{b}\right\|$, b) $\left\|\pi\overrightarrow{b}\right\|$, c) $\left\|-\overrightarrow{b}\right\|$, d) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, e) $\left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|$.

4. Encuentra un vector $\overrightarrow{b}$ con la misma dirección que $\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}\widehat{i} - \frac{1}{2}\widehat{j} - \frac{1}{2}\widehat{k}$, que tenga: a) magnitud 3, b) el triple de la magnitud de $\overrightarrow{a}$.

5. Sean $P(3, 4, 5)$ y $Q(2, 3, 4)$. Determina: a) la distancia entre P y Q, b) la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$, c) el punto medio del segmento de recta entre P y Q.

6. En cada inciso calcula $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, $\|\overrightarrow{a}\|$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\|$ y el coseno del ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$:

   (a) $\overrightarrow{a} = 3\widehat{i} - 4\widehat{j}$, $\overrightarrow{b} = 4\widehat{i} + 3\widehat{j}$
   (b) $\overrightarrow{a} = 3\widehat{i}$, $\overrightarrow{b} = \widehat{i} + \widehat{j}$
   (c) $\overrightarrow{a} = \widehat{i} + \widehat{j} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\widehat{i} + 3\widehat{j} - 4\widehat{k}$
   (d) $\overrightarrow{a} = \widehat{i} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\widehat{i} + 4\widehat{j}$

7. Si $\overrightarrow{a} = (-1, 3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (2, -4, 7)$ y $\overrightarrow{c} = (1, 0, 2)$, calcula: a) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$, b) $\left(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c})$, c) $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$, d) $(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c})$.

8. La proyección de un vector $\overrightarrow{b}$ en la dirección de un vector no nulo $\overrightarrow{a}$ es el vector
$$\mathrm{Pr}\,oy_{\overrightarrow{a}}\,\overrightarrow{b} = \left(\frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}\right)\overrightarrow{a}.$$
Calcula $\mathrm{Pr}\,oy_{\overrightarrow{a}}\,\overrightarrow{b}$, si $\overrightarrow{a} = -\widehat{i} + 3\widehat{j} + 4\widehat{k}$ y $\overrightarrow{b} = 2\widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$.

9. (a) Demuestra que $\left\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2+\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2+2\,\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|\cos\theta$.
Sugerencia: $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}$.

(b) Da ejemplos de vectores no nulos $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ en $\mathbb{R}^2$ que satisfagan:

i. $\left\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2+\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2$

ii. $\left\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2+\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2+2\,\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|$

iii. $\left\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2+\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2-2\,\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|$

10. Encuentra todos los valores α tales que los vectores $(3\alpha,-1,-1)$ y $(\alpha,2,1)$ sean ortogonales entre sí.

11. Sean $\widehat{u}$ y $\widehat{v}$ vectores ortogonales unitarios y sea $\overrightarrow{w}=\alpha\widehat{u}+\beta\widehat{v}$. Calcula: a) $\overrightarrow{w}\cdot\widehat{u}$, b) $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}$.

12. Sean $\overrightarrow{x}$ y $\overrightarrow{y}$ vectores ortogonales, tales que $\|\overrightarrow{x}\|=3$ y $\|\overrightarrow{y}\|=2$. Si $\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}$, calcula: a) $\overrightarrow{w}\cdot(5\overrightarrow{x})$, b) $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}$.

13. Sean $\overrightarrow{x}$ y $\overrightarrow{y}$ vectores tales que $\|\overrightarrow{x}\|=2$, $\|\overrightarrow{y}\|=3$, $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=-1$. Si $\overrightarrow{w}=3\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y}$, calcula: a) $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{x}$, b) $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}$.

14. Encuentra un vector que sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{a}=\widehat{i}-\widehat{j}+3\widehat{k}$ y $\overrightarrow{b}=2\widehat{i}+5\widehat{k}$.

15. En cada inciso determina si los vectores son paralelos, perpendiculares, o ninguna de las dos cosas:

(a) $\overrightarrow{a}=3\widehat{i}-6\widehat{j}+4\widehat{k}$ y $\overrightarrow{b}=\widehat{i}-2\widehat{j}+(4/3)\widehat{k}$

(b) $\overrightarrow{a}=\widehat{i}+\widehat{j}$, $\overrightarrow{b}=\widehat{i}+\widehat{k}$

(c) $\overrightarrow{a}=3\widehat{i}-\widehat{j}$, $\overrightarrow{b}=-6\widehat{i}+2\widehat{j}$

(d) $\overrightarrow{a}=2\widehat{i}-\widehat{j}+\widehat{k}$, $\overrightarrow{b}=3\widehat{i}+4\widehat{j}-2\widehat{k}$

CÁLCULO II
TAREA 2
CURVAS PARAMÉTRICAS. RECTAS. PLANOS.
(Temas 1.2-1.4)

1. Identifica y grafica las siguientes curvas paramétricas $\overrightarrow{r} = x\widehat{i} + y\widehat{j}$ en el plano xy:

   (a) $\overrightarrow{r}(t) = (1+t)\,\widehat{i} - t\,\widehat{j}, \quad t \in \mathbb{R}.$

   (b) $\overrightarrow{r}(m) = (m+1)\,\widehat{i} + (m^2-1)\,\widehat{j}, \quad m \in \mathbb{R}.$

   (c) $\overrightarrow{r}(a) = (4-a)\,\widehat{i} - \sqrt{a}\,\widehat{j}, \quad a \geq 0.$

   (d) $\overrightarrow{r}(b) = (2-\sqrt{4-b})\,\widehat{i} + e^{-2+\sqrt{4-b}}\,\widehat{j}, \quad b \leq 4.$

   (e) $\overrightarrow{r}(\alpha) = 3\alpha\,\widehat{i} + \dfrac{3}{\alpha}\,\widehat{j}, \quad \alpha \neq 0.$

   (f) $\overrightarrow{r}(t) = e^t\,\widehat{i} - 5e^{2t}\,\widehat{j}, \quad t \in \mathbb{R}.$

   (g) $\overrightarrow{r}(t) = \ln t\,\widehat{i} + \ln(et)\,\widehat{j}, \quad t > 0.$

   (h) $\overrightarrow{r}(t) = t\,\widehat{i} + \ln(1/t)\,\widehat{j}, \quad t > 0.$

   (i) $\overrightarrow{r}(\theta) = 3\cos\theta\,\widehat{i} + 3\,sen\,\theta\,\widehat{j}, \quad \theta \in [0, 2\pi)\,.$

   (j) $\overrightarrow{r}(t) = -\sqrt{1-t^2}\,\widehat{i} + t\,\widehat{j}, \quad |t| \leq 1.$

2. Sea $\overrightarrow{r}(\theta) = \cos\theta\,\widehat{i} + sen\,\theta\,\widehat{j}$, con $0 \leq \theta < 2\pi$.

   (a) Encuentra el vector derivada $d\overrightarrow{r}/d\theta$.

   (b) Calcula $d\overrightarrow{r}/d\theta$ en $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, y muestra gráficamente que estos tres vectores son tangentes a la curva $\overrightarrow{r}(\theta)$ en las posiciones correspondientes.

   (c) Demuestra que para esta curva se satisface $\overrightarrow{r} \cdot (d\overrightarrow{r}/d\theta) = 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.¿Qué significa este resultado?

3. Sea $\overrightarrow{r}(t) = (sen\,t\,\cos t)\,\widehat{i} + (sen^2 t)\,\widehat{j} + (\cos t)\,\widehat{k}$ la ecuación de una curva en $\mathbb{R}^3$.

   (a) Prueba que la curva $\overrightarrow{r}(t)$ está en una esfera unitaria con centro en el origen.

   (b) Encuentra el vector tangente a la curva, $d\overrightarrow{r}/dt$, y demuestra que éste es ortogonal a $\overrightarrow{r}$, para todo valor de t. ¿Cuál es la razón de este hecho?

4. Da un ejemplo de una curva paramétrica $\overrightarrow{r}(t)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{r} \cdot (d\overrightarrow{r}/dt) \neq 0$ en general.

5. Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta con la información dada:

   (a) Pasa por el origen y es paralela al vector $\overrightarrow{v} = 3\widehat{i} - 2\widehat{j} + 5\widehat{k}$.
   (b) Pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es paralela al eje y.
   (c) Pasa por los puntos $P(3, -1, 4)$ y $Q(1, -2, 0)$.
   (d) Pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta $\dfrac{x+1}{3} = -\dfrac{y}{2} = z - 5$.
   (e) Pasa por el origen y es perpendicular a las rectas $x = 1 - 3a$, $y = 3$, $z = 1 + 2a$ y $x = 2 + b$, $y = -3b$, $z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

6. Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $\overrightarrow{r}(\theta) = \cos\theta\ \widehat{i} + sen\,\theta\ \widehat{j}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, en $\theta = \frac{\pi}{4}$. Ilustra con una gráfica.

7. En cada inciso halla las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $\overrightarrow{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, en el punto dado $t = t_0$:

   (a) $\overrightarrow{r}(t) = sen\,t\ \widehat{i} + (t^2 - \cos t)\ \widehat{j} + e^t\ \widehat{k}, \quad t_0 = 0.$
   (b) $\overrightarrow{r}(t) = (2t^2)\ \widehat{i} + (4t)\ \widehat{j} + \widehat{k}, \quad t_0 = 1.$

8. Encuentra la ecuación del plano con la información dada:

   (a) Pasa por el punto $P(2, 1, 5)$ y es ortogonal al vector $\overrightarrow{a} = 3\,\widehat{i} - 4\,\widehat{j} + 2\,\widehat{k}$.
   (b) Pasa por los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(1, 2, 1)$ y $C(3, 1, -2)$.
   (c) Pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ y es paralelo al plano $2\,x - 7\,y + 5\,z = 13$.
   (d) Pasa por el origen y es perpendicular a la recta $-\dfrac{x}{2} = 3 - y = \dfrac{z-2}{3}$.
   (e) Contiene a las rectas $x = 2 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = 1$ y $x = 3 + s$, $y = -1 + s$, $z = s$, $t, s \in \mathbb{R}$.
   (f) Pasa por el punto $P(7, -4, 3)$ y es paralelo al plano yz.
   (g) Es vertical y pasa por los puntos $P(1, 0, 0)$ y $Q(0, 1, 0)$.

9. Da la ecuación del plano que es perpendicular a la curva $\overrightarrow{r}(t) = 3t\ \widehat{i} + 2t^2\ \widehat{j} + t^5\ \widehat{k}$ en el punto con $t = 1$.

10. Halla el punto de intersección de la curva

$$\overrightarrow{r}(t) = (t-2)e^{1-t}\ \widehat{i} + 4\,\widehat{j} + \left(\frac{t-3}{t+1}\right)\widehat{k}, \quad t \neq -1,$$

con el plano yz.

11. Encuentra la intersección del plano xy con la recta tangente a la curva $\overrightarrow{r}(t) = sen\,t \, \cos t \, \widehat{i} + sen^2 t \, \widehat{j} + \cos t \, \widehat{k}$ en $t_0 = \pi/4$.

12. En cada inciso determina si los dos conjuntos son perpendiculares, paralelos o ninguno:

    (a) $L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1 + 2t, \; y = 3 - t, \; z = 3t, \; t \in \mathbb{R}\}$,
    $L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 3s, \; y = 2 + s, \; z = 1 + 2s, \; s \in \mathbb{R}\}$.

    (b) $\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3y + 5z = 4\}$,
    $\pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -4x + 2y + 2z = 0\}$.

    (c) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2 - t, \; y = 3 + 2t, \; z = t, \; t \in \mathbb{R}\}$,
    $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + y + z = 5\}$.

    (d) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2 - t, \; y = 3 + 2t, \; z = t, \; t \in \mathbb{R}\}$,
    $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y - z = 0\}$.

13. Sean I el ingreso, $\overrightarrow{p} = (p_x, p_y, p_z)$ el vector de precios y $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ el vector de cantidades, con $\overrightarrow{p}, I$ constantes.

    (a) Encuentra la ecuación cartesiana del plano presupuestal $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x} = I$.

    (b) Encuentra la ecuación cartesiana del plano π que pasa por el origen y es paralelo al plano $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x} = I$.

    (c) Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x} = I$.

14. En cada inciso justifica si la afirmación es verdadera o falsa:

    (a) El plano $x+y+z = 1$ es perpendicular al plano $-2x - y + 3z = 0$.

    (b) La recta $x = t, \; y = 2t, \; z = 3t, \; t \in \mathbb{R}$, es paralela al plano $x + 2y + 3z = 6$.

    (c) La ecuación $y = 4 - 2x$ representa una recta en $\mathbb{R}^3$.

    (d) La recta $x = 1 + t, \; y = 2t, \; z = 1 - 3t, \; t \in \mathbb{R}$, contiene al punto $P(0, -2, 4)$.

15. Encuentra la ecuación del hiperplano en $\mathbb{R}^5$ que pasa por el punto $P(3, 0, -2, 1, 5)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{v} = (1, -2, 4, -3, -1)$.

CÁLCULO II
TAREA 3
TOPOLOGÍA BÁSICA
(Tema 1.5)

1. En cada inciso: i) grafica el conjunto S, ii) identifica sus puntos interiores (PI), exteriores (PE) y frontera (PF), iii) indica si S es abierto, cerrado, acotado, compacto, convexo:

   (a) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \in \mathbb{Z} \text{ y } x_2 \in \mathbb{Z}\}$.
   (b) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \in \mathbb{Z} \text{ o } x_2 \in \mathbb{Z}\}$.
   (c) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \notin \mathbb{Z} \text{ y } x_2 \notin \mathbb{Z}\}$.
   (d) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x_1 \leq 1\}$.
   (e) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x_1 < 1\}$.
   (f) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 4x_1 + x_2 = 12, \ x_1 \geq 0, x_2 > 0\}$.
   (g) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.
   (h) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$.
   (i) $S = \{(0,0)\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 0\}$.
   (j) $S = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \neq 0 \text{ o } x_2 \neq 0\}$.

2. En cada inciso grafica el conjunto S y determina si éste es abierto, cerrado, acotado, compacto, convexo:

   (a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq 4\} \cup \{3\}$.
   (b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x^2 > 1\}$.
   (c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 < x < 1 \text{ y } y = 0\}$.
   (d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1, \quad x, y > 0\}$.
   (e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y > 1, \ x, y \geq 0\}$.
   (f) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y > 0\} \cup \{(1, -1)\}$.
   (g) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + \ln y \geq 0, \quad y > 0\}$.
   (h) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1, \quad x \geq 0\}$.
   (i) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (j) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = t^3, y = -t^3, \ t \in \mathbb{R}\}$.

3. Al conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1, \ x_i \geq 0\}$ se le conoce como el simplejo estándar en $\mathbb{R}^3$. Esboza la gráfica del conjunto. ¿Es compacto?¿ Es convexo?

4. Demuestra que los siguientes conjuntos son convexos:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$.

   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 2\}$.

   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y < x\}$.

   (d) $A = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n | \ ||\overrightarrow{x}|| \leq 1\}$.

5. Demuestra que el hiperplano $\Pi = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n | \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = c, \ \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n, \ c \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto convexo.

CÁLCULO II
TAREA 4
FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES
(Temas 2.1-2.4)

1. En cada inciso encuentra y grafica el dominio de la función:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$.
   (b) $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.
   (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}} + \sqrt{9-x^2-y^2}$.
   (d) $f(x,y) = e^{1-\sqrt{1-\ln(x+y)}}$.
   (e) $f(x,y) = \ln(e^x + y)$.
   (f) $f(x,y,z) = 1 - \sqrt{1-x-y-z}$.
   (g) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.
   (h) $f(x) = \ln(1-x^2)$.

2. Para cada una de las siguientes funciones: i) escribe el dominio y la imagen (usa notación de conjuntos), ii) determina si el dominio es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo, iii) encuentra las ecuaciones de las trazas, iv) dibuja algunas curvas de nivel, indicando la dirección de crecimiento de la función, v) esboza la gráfica de la superficie $z = f(x,y)$:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
   (b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.
   (c) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.
   (d) $f(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$.
   (e) $f(x,y) = (xy)^{1/2}$.

3. En cada inciso escribe el dominio y la imagen de la función y luego proporciona la ecuación y gráfica del conjunto de nivel que pasa por el punto P dado:

   (a) $f(x,y) = \ln(ye^x)$, $P(0,1)$.
   (b) $f(x,y) = \ln(26-x^2-y^2)$, $P(3,4)$.

(c) $f(x,y) = 2\ln x + \ln y, \quad P(\frac{1}{2}, 4).$

(d) $f(x,y,z) = e^{-\sqrt{1-x-y}}, \quad P(1,0,0).$

(e) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{\ln(x^2+y^2)}}, \quad P(0,1,1).$

(f) $f(x,y,z) = e^{1-\sqrt{1-\ln y}}, \quad P(0,1,e).$

(g) $f(x,y,z) = 1 - e^{-\sqrt{1-x-y-z}}, \quad P(0,0,1).$

(h) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{x^2+z^2-9}}, \quad P(5,2,0).$

4. En cada inciso grafica algunas curvas de nivel $f(x,y) = c$, indicando la dirección de crecimiento de c:

   (a) $f(x,y) = -x - y.$

   (b) $f(x,y) = |x| + |y|.$

   (c) $f(x,y) = e^x - y.$

   (d) $f(x,y) = x + \ln y, \quad y > 0.$

   (e) $f(x,y) = \ln x + y, \quad x > 0.$

   (f) $f(x,y) = x + \sqrt{y}, \quad y \geq 0.$

   (g) $f(x,y) = x^2 + 4x\sqrt{y+4} + 4(y+4), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$

   (h) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$

   (i) $f(x,y) = \min\{x,y\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}.$

   (j) $f(x,y) = \max\{x,y\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}.$

   (k) $f(x,y) = e^x + e^y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$

   (l) $f(x,y) = e^{-x} + e^{-y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$

5. Identifica los siguientes conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^3$:

   (a) $f(x,y) = x - 3y.$

   (b) $\overrightarrow{r}(t) = (1+t)\widehat{i} + (2t)\widehat{j} + (5-t)\widehat{k}.$

   (c) $y = x - 1.$

   (d) $2x^2 + 6y^2 + 4z^2 = 12.$

   (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1.$

   (f) $y = x^2.$

   (g) $x^2 - y^2 - z^2 = 0.$

   (h) $x^2 - y^2 - z^2 = 1.$

   (i) $x^2 - y^2 - z = 0.$

(j) $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$.

(k) $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$.

(l) $y^2 + z^2 = 1$.

(m) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(n) $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t)\widehat{i} + (sent)\widehat{j} + t\widehat{k}$.

(o) $x + y = 2, \ x = 1$.

(p) $x - 1 = y + 1 = -z = 0$.

6. Calcula los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (5x + 3xy + y - 2)$.

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{x^2+y^3}{x+y+1}\right)$.

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$.

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \ln\left(1+x^2\right)$.

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-y-2x+2}{x-1}$.

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,3)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$.

   (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \dfrac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$.

7. Demuestra que para las siguientes funciones no existe el limite cuando $(x,y) \to (0,0)$:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.

   (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

   (d) $f(x,y) = \dfrac{y\sqrt{x}}{x+y^2}, \quad x \geq 0$.

   (e) $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$.

8. Determina en qué puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son continuas las siguientes funciones y grafica la región correspondiente:

   (a) $f(x, y) = \ln(xy)$.

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}$.

   (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{|x| + |y|}$.

   (d) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 - y^2}$.

9. Encuentra el valor de la constante C de tal modo que $f(x, y)$ sea continua, si

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+5)\ seny}{y}, & (x,y) \neq (0,0), \\ C, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

CÁLCULO II
TAREA 5
DIFERENCIACIÓN, LINEALIZACIÓN, DIFERENCIAL TOTAL Y REGLA DE LA CADENA
(Temas 3.1-3.3)

1. Encuentra las derivadas parciales f_x y f_y:

   (a) $f(x,y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2.$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}.$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{2x^5 - 3y}.$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(2x-y)}.$

   (e) $f(x,y) = sen^4\left(x - 3y\right).$

   (f) $f(x,y) = \ln^5(x/y).$ Nota: $\ln^5 u =\neq 5\ln u.$

   (g) $f(x,y) = (1+xy)\,e^y$

   (h) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}}\right).$

   (i) $f(x,y) = \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 + \sqrt{e^{y^2}}.$

   (j) $f(x,y) = x^{1/y}.$

   (k) $f(x,y) = \left(1 + x^{1/y}\right)^y.$

2. Encuentra todas las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

   (a) $E(p,q) = ap^2e^{bq}$, a, b constantes.

   (b) $R(p_1,p_2) = \alpha p_1^{\beta} + \gamma e^{p_1p_2}$, α, β, γ constantes.

   (c) $V(p_x,p_y,I) = \left(\dfrac{I}{p_x + \frac{1}{2}p_y}\right)^2.$

   (d) $x(v_1,\ldots,v_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, α_i constantes.

   (e) $u(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i$ α_i constantes.

   (f) $u\left(c_0,\ldots,c_N\right) = \sum\limits_{t=1}^{N}\left(ac_t + bc_{t-1}\right)$, con a y b constantes.

   (g) $P(L,K,\alpha,\rho) = (\alpha L^{1/\rho} + (1-\alpha)K^{1/\rho})^{\rho}.$

3. Demuestra que la función de producción $P(L,K) = [\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho}]^{-1/\rho}$ satisface la ecuación $L\dfrac{\partial P}{\partial L} + K\dfrac{\partial P}{\partial K} = P(L,K)$.

4. Demuestra que la función de producción $P(L,K) = AL^a K^b e^{cK/L}$ satisface la ecuación $L\dfrac{\partial P}{\partial L} + K\dfrac{\partial P}{\partial K} = (a+b)P(L,K)$.

5. Encuentra todas las derivadas parciales de segundo orden para f:

   (a) $f(x,y) = 3xy - 5x^2 - 6y + 2$.

   (b) $f(x,y) = 3ye^{-2xy}$.

   (c) $f(x,y) = \ln(x-y)$.

6. Sea $f(x,y) = x^y + \ln\sqrt{e^{x^2y^2}} + \ln(y/x^2)$. Calcula $f_{xy}(e,1)$.

7. Encuentra la linealización de f en el punto P:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1, \ \ P(1,1)$.

   (b) $f(x,y) = e^x \ln(2+y), \ \ P(0,-1)$.

   (c) $f(x,y) = (x+1)^a (y+1)^b, \ \ a,b$ constantes, $\ P(0,0)$.

8. Sea $g(\mu,\varepsilon) = [(1+\mu)(1+\varepsilon)^\alpha]^{1/(1-\beta)} - 1$, α,β constantes, $\beta \neq 1$. Muestra que si $\mu \approx 0$ y $\varepsilon \approx 0$, entonces

$$g(\mu,\varepsilon) \simeq \left(\frac{1}{1-\beta}\right)\mu + \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)\varepsilon.$$

9. Supón que $v(1,0) = -1$, $v_x(1,0) = -4/3$, $v_y(1,0) = 1/3$. Utiliza la linealización para encontrar un valor aproximado para $v(1.01, 0.02)$.

10. Utiliza la diferencial total dz para aproximar el cambio en z cuando (x,y) se mueve de P a Q y luego calcula el cambio exacto Δz utilizando una calculadora:

    (a) $z = 2x^2y^3, \ \ P(1,1), \ Q(0.99, 1.02)$.

    (b) $z = x^2 - 5xy, \ \ P(2,3), \ Q(2.03, 2.98)$.

11. La producción de una empresa está dada por $P(L,K) = 120L^{1/3}K^{1/2}$, en donde L denota el trabajo y K el capital. Se planea disminuir la fuerza de trabajo, de $1,000$ a 999, e incrementar la producción, de $24,000$ a $24,082$. Aproxima el cambio en el capital.

12. De acuerdo con un estudio de alcohólicos anónimos, las demandas diarias en el D.F. de Bacardí blanco (D_1) y brandy Presidente (D_2) están dadas por

$$D_1(p_1,p_2) = \frac{6000\, p_2^{1/3}}{p_1^2}, \quad D_2(p_1,p_2) = \frac{2000\, p_1^{1/2}}{p_2}$$

en donde p_1 y p_2 son los precios del Bacardí y del Presidente, respectivamente. En un momento dado, los precios son $p_1 = 9$ y $p_2 = 8$. Bacardí se verá obligado a cambiar su precio, debido a la variación de la producción de caña de azúcar.

(a) ¿Qué sucede con la demanda de Bacardí, si su precio aumenta de \$9 a \$9.50, mientras que Presidente mantiene su precio constante?

(b) Si Bacardí cambia su precio de acuerdo con el inciso anterior, ¿cómo debe Presidente cambiar su precio, si desea mantener constante su demanda?

13. El volumen V de un cilindro circular recto de radio r y altura h está dado por $V = \pi r^2 h$. Si el radio cambia de $r_0 = 1$ a $r_f = 1.03$, y la altura cambia de $h_0 = 5$ a $h_f = 4.9$, estima el cambio absoluto (dV), el cambio relativo (dV/V_0) y el cambio porcentual ($dV/V_0 \times 100\%$) en el valor del volumen.

14. Dibuja un diagrama de árbol y escribe la fórmula de la regla de la cadena para calcular las derivadas indicadas:

(a) $\dfrac{dz}{dt}$, si $z = f(x,y),\ x = g(t),\ y = h(t)$.

(b) $\dfrac{dz}{dt}$, si $z = f(x,y,t),\ x = g(t),\ y = h(t)$.

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, si $z = f(x,y),\ x = g(t),\ y = h(t,s)$.

(d) $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, si $z = f(x,t),\ x = g(t,s)$.

15. Sea $U = f(x,z)$ el bienestar total de una sociedad, en donde x es un índice de la cantidad total de bienes producidos y consumidos y $z = h(x)$ es una medida del nivel de contaminación. Escribe una expresión para calcular cómo cambia U al cambiar x y luego aplica este resultado para $f(x,z) = A\ln\left(1 + (x/z)^{\alpha}\right)$, con $A, \alpha \in \mathbb{R}^+$.

16. Sea $U = f(c_1, c_2, t)$, con $c_1 = c_1(t)$ y $c_2 = c_2(t, w)$. Da una expresión para calcular cómo cambia U al cambiar t y luego aplica este resultado a $f(c_1, c_2, t) = e^{-2t} \ln(c_1 c_2)$.

17. La cantidad x de un bien demandado depende del precio p del bien y la cantidad a que el productor gasta en publicidad, es decir, $x = f(p, a)$, con $f_p(p, a) < 0$ y $f_a(p, a) > 0$. El precio depende del clima w y el impuesto t, es decir, $p = g(w, t)$, con $g_w(w, t) > 0$ y $g_t(w, t) < 0$. La cantidad de publicidad depende sólo de t, es decir, $a = h(t)$, con $h'(t) > 0$. Si el impuesto aumenta, discute qué sucede con la demanda (aumenta, disminuye, o ninguna de éstas).

18. Define la función F de dos variables por $F(x, y) = f(g(x, y), h(k(x)))$, donde f, g, h y k son funciones diferenciables. Encuentra la derivada parcial de F con respecto a x.

19. Define la función F de dos variables por $F(p, q) = pf(p, q, m(p, q))$, donde f y m son funciones diferenciables. Encuentra la derivada parcial de F con respecto a p.

20. Una empresa produce un solo bien utilizando un solo insumo. Sean f su función de producción (diferenciable), w el precio del insumo y p el precio del bien. Sea $z(w, p)$ la cantidad de insumos que maximizan el beneficio de la empresa. De esta manera, su beneficio máximo es $\pi(w, p) = pf(z(w, p)) - wz(w, p)$. Encuentra una expresión para determinar cómo cambia el beneficio máximo si se incrementa p.

CÁLCULO II
TAREA 6
DERIVACIÓN IMPLÍCITA, VECTOR GRADIENTE Y PLANO TANGENTE
(Temas 3.4-3.5)

1. Determina si la ecuación $2x^2+4xy-y^4+67=0$ define a y como una función implícita diferenciable de x alrededor del punto $P(1,3)$. En ese caso, calcula $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_P$.

2. Las siguientes ecuaciones definen a y como función implícita diferenciable de x. En cada caso, calcula dy/dx en el punto P:

   (a) $x^2+xy+y^2=7, \quad P(1,2)$.

   (b) $e^{1-xy}+\ln(x/y)=1, \quad P(1,1)$.

   (c) $xe^y+sen(xy)+y-\ln 2=0, \quad P(0,\ln 2)$.

3. Sea $P(L,K)=L^{1/2}K^{1/2}$ una función de producción. Utiliza el teorema de la función implícita para calcular dK/dL en el punto $(L_0,K_0)=(25,4)$ de la isocuanta $P(L,K)=10$.

4. Sea $P(L,K)=\left(L^{2/3}e^{-L}\right)\left(K^{1/3}e^{-K}\right)$ una función de producción. Utiliza el teorema de la función implícita para calcular dK/dL en el punto $(L_0,K_0)=(1,1)$ de la isocuanta $P(L,K)=e^{-2}$.

5. Para una función de producción $P(L,K)$, la tasa marginal de sustitución técnica (TMS) entre K y L en cada punto de una isocuanta $P(L,K)=Q_0$ es el negativo de la derivada, $-dK/dL$, de la curva isocuanta en ese punto. Encuentra la TMS para la función CES, $P(L,K)=A\left(aL^\rho+(1-a)K^\rho\right)^{1/\rho}$, $-\infty<\rho<1$, y compárala con la TMS de la función de Cobb-Douglas, $P(L,K)=AL^aK^{1-a}$, en donde $0<a<1$.

6. Sea $D=f(t,p)$ la demanda de un bien en función del precio sin impuestos p y del IVA unitario t, y sea $S=g(p)$ la función de oferta. Determina si la condición de equilibrio $f(t,p)=g(p)$ define a p como función diferenciable de t. En caso afirmativo, encuentra una expresión para dp/dt.

7. Determina si la ecuación $x^2y+y^2z+z^2x=-1$ define a x como función de y y z en la vecindad del punto $P(1,2,-1)$. En caso afirmativo, calcula las derivadas parciales $\partial x/\partial y$ y $\partial x/\partial z$.

8. Las siguientes ecuaciones definen a z como función implícita diferenciable de x y y. En cada caso, encuentra $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en el punto P:

   (a) $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - 3\ln 2 = 0, \quad P\,(1, \ln 2, \ln 3)\,.$

   (b) $x^y + y^z + z^x - 3 = 0, \quad P\,(1, 1, 1)\,.$

9. Una función de producción generalizada $Q = P\,(L, K)$ está definida implícitamente por $Qe^{rQ} = AL^{\alpha}K^{\beta}$, con $A, \alpha, \beta, r > 0$. Obtén los productos marginales $\partial Q/\partial L$ y $\partial Q/\partial K$.

10. El valor de equilibrio de la variable x es solución de la ecuación $f(x, \alpha, \beta) + g(h(x), k(\alpha)) = 0$, en donde α y β son parámetros y f, g, h y k son funciones diferenciables. ¿Cómo afectaría al valor de equilibrio x un cambio en el parámetro α (dejando constante a β)?

11. El valor de equilibrio de la variable x es solución de la ecuación $f(x, g(x, \alpha), \beta) + h(x, \beta) = 0$, en donde α y β son parámetros y f, g y h son funciones diferenciables. ¿Cómo afectaría al valor de equilibrio x un cambio en el parámetro α (dejando constante a β)?

12. La función g se define implícitamente por la condición $F(f(x, y), g(y)) = h(y)$. Encuentra la derivada $g'(y)$ en términos de las funciones F, f, g, h y sus derivadas.

13. Calcula el gradiente ∇f de la función f en el punto P y dibújalo sobre la curva de nivel que pasa por ese punto:

   (a) $f(x, y) = y - x, \quad P\,(2, 1)\,.$

   (b) $f(x, y) = y - x^2, \quad P\,(-1, 0)\,.$

   (c) $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2, \quad P\,(1, 1)\,.$

   (d) $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right), \quad P\,(1, 1)\,.$

14. Calcula el gradiente de la función en el punto dado:

   (a) $f(x, y) = \ln\left(x^y + 1\right), \quad P\,(e, 1)\,.$

   (b) $P\,(L, K) = \sqrt{\sqrt{L} + \sqrt{K}}, \quad (L_0, K_0) = (1, 9)\,.$

   (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z\ln x, \quad P\,(1, 1, 1)\,.$

15. Calcula f y ∇f en el punto P:

    (a) $f(x,y) = x^2 e^{\left(y^2/x\right)-1}, \quad P(4,2)$.

    (b) $f(x,y) = x \ln\left(\dfrac{y}{x^2}\right), \quad P(e,1)$.

    (c) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{e^{16x^2}} + e^8 \ln y\right), \quad P(1,1)$.

16. Considera la superficie $z = f(x,y)$, con $f(x,y) = xye^{2x-y}$. Encuentra un vector normal a la curva de nivel $f(x,y) = 2$ en el punto $P(1,2)$.

17. Encuentra la derivada direccional de f en el punto P en la dirección de $\overrightarrow{A}$:

    (a) $f(x,y) = 2xy - 3y^2, \quad P(5,5), \quad \overrightarrow{A} = 4\widehat{i} + 3\widehat{j}$.

    (b) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2, \quad P(1,1,1), \quad \overrightarrow{A} = \widehat{i} + \widehat{j} + \widehat{k}$.

18. Encuentra la dirección en la que la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ crece más rápidamente, y la dirección en la que decrece más rápidamente, en el punto $P_0(-1,1)$.

19. La temperatura en cada punto (x,y,z) de una habitación está dada por $T(x,y,z) = xyz(1-x)(2-y)(3-z)$, con $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$. Si un mosquito se localiza en el punto $(1/2,1,1)$, ¿hacia qué dirección debe volar para enfriarse lo más rápidamente posible?

20. Encuentra un vector normal a las siguientes superficies $z = f(x,y)$ en el punto P:

    (a) $f(x,y) = -\dfrac{18}{(x+1)^2 + y^2 + 1}, \quad P(1,1,-3)$.

    (b) $f(x,y) = xy^{1/x}, \quad P(1,e^2,e^2)$.

21. Encuentra las ecuaciones de i) el plano tangente y ii) la recta normal a las siguientes superficies $z = f(x,y)$ en el punto P:

    (a) $f(x,y) = xe^y, \quad P(1,0,1)$.

    (b) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}, \quad P(0,0,1)$.

    (c) $f(x,y) = \sqrt{3 - xe^{xy}}, \quad P(2,0,1)$.

22. Encuentra el punto de la superficie $z = \dfrac{e^y}{1+xy}$ en donde el vector normal es paralelo al eje z.

23. Encuentra el punto de la superficie $z = e^{-1+\sqrt{(x-1)^2+y^2+1}}$ en donde el plano tangente es horizontal y escribe la ecuación de ese plano tangente.

24. Encuentra el punto de la superficie $z = 2x^2+3y^2$ en donde el plano tangente es paralelo al plano $8x-3y-z=0$ y escribe la ecuación de ese plano tangente.

25. Encuentra el punto de la superficie $z = 16-4x^2-y^2$ en donde el plano tangente es perpendicular a la recta $x = 3+4t$, $y = 2t$, $z = 2-t$, $t \in \mathbb{R}$, y escribe la ecuación de ese plano tangente.

CÁLCULO II
TAREA 7
FUNCIONES HOMOGÉNEAS
(Tema 3.6)

1. En cada inciso determina si la función f es homogénea, y de qué grado:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
   (b) $f(x,y) = x^2y^3$.
   (c) $f(x,y) = x^2 + y^3$.
   (d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.
   (e) $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{x^3 + yz^2}$.
   (f) $f(x,y) = \ln(xy)$.
   (g) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)$.
   (h) $f(x,y) = \sqrt{xy}\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)$.
   (i) $f(x_1,x_2) = (x_1^d + x_2^d)^{1/d}$, $d \in \mathbb{R}^+$.

2. Supón que $f(\overrightarrow{x})$ es homogénea de grado r y $g(\overrightarrow{x})$ es homogénea de grado $s \neq r$. Determina si la función h en cada inciso es homogénea, y de qué grado:

   (a) $h(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})g(\overrightarrow{x})$.
   (b) $h(\overrightarrow{x}) = \dfrac{f(\overrightarrow{x})}{g(\overrightarrow{x})}$.
   (c) $h(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})$.
   (d) $h(\overrightarrow{x}) = [g(\overrightarrow{x})]^p$.
   (e) $h(x_1,...,x_n) = f(x_1^m,...,x_n^m)$.

3. Sea $u(x,y)$ una función de utilidad, homogénea de grado 1. Determina si las siguientes funciones de u son homogéneas, y de qué grado:

   (a) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{u(x,y)}{x}\right)$.

   (b) $f(x,y) = \ln u(x,y)$.

4. Sea $H = e^{Q}$, donde $Q(a,b) = Aa^{\alpha}b^{\beta}$, $\alpha+\beta \neq 0$. ¿Es H una función homogénea?

5. Demuestra que la pendiente de la recta tangente a las curvas de nivel de una función homogénea, $z = f(x,y)$, es constante a lo largo de rayos que parten del origen.

6. Demuestra que la función $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$ es homogénea y determina de que grado. Luego verifica que f satisface el teorema de Euler, $\overrightarrow{x} \cdot \nabla f(\overrightarrow{x}) = kf(\overrightarrow{x})$, con k el grado de homogeneidad de f.

7. Demuestra que una función de producción tipo Cobb-Douglas, $F(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$, es homogénea de grado $\alpha+\beta$. Luego verifica que F satisface el teorema de Euler, $LF_L + KF_K = (\alpha+\beta)F$.

8. Demuestra que los productos marginales F_L y F_K de una función de producción tipo Cobb-Douglas, $F(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$, son homogéneos de grado $\alpha+\beta-1$.

9. Demuestra que la función CES, $F(L,K) = (\delta L^{-\rho}+(1-\delta)K^{-\rho})^{-m/\rho}$, es homogénea de grado m. Luego verifica que F satisface el teorema de Euler, $LF_L + KF_K = mF$.

10. Demuestra que la función de producción $F(L,K) = AL^{a}K^{b}e^{cK/L}$ es homogénea de grado $a+b$. Luego verifica que F satisface el teorema de Euler.

11. Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado 2, tal que $f(2,3) = 6$ y $f_x(2,3) = 3$.

    (a) ¿Cuánto vale $f(4,6)$?

    (b) ¿Cuánto vale $f_x(4,6)$?

    (c) Utiliza el teorema de Euler para encontrar el valor de $f_y(2,3)$.

12. Sea $F(L,K)$ una función de producción homogénea de grado 1. Se sabe que $F(100,40) = 300$, $F_L(100,40) = 1$ y $F_K(100,40) = 5$. La productividad media del trabajo, M, se define como $M(L,K) = \dfrac{F(L,K)}{L}$.

   (a) Determina si M es homogénea, y de qué grado.

   (b) Calcula $M(25,10)$, $M_L(25,10)$ y $M_K(25,10)$. Sugerencia: $M(25,10) = M\left((\frac{1}{4})100, (\frac{1}{4})40\right)$.

CÁLCULO II
TAREA 8
FUNCIONES CÓNCAVAS, CONVEXAS, CUASICÓNCAVAS Y CUASICONVEXAS
(Temas 4.1-4.3)

1. En cada inciso encuentra el polinomio de Taylor de orden 2, $P_2(x,y)$, generado por f en el punto (x_0, y_0) dado:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y+1}, \quad (x_0,y_0) = (0,0).$

   (b) $f(x,y) = e^{-2x}\ln y, \quad (x_0,y_0) = (0,1).$

   (c) $f(x,y) = e^{x^2-y}, \quad (x_0,y_0) = (-1,1).$

2. A partir de la definición, demuestra que las siguientes funciones son convexas en su dominio:

   (a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = |x|.$

   (b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^2.$

   (c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y) = |x+y|.$

   (d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y) = x^2+y^2.$

3. Sea $C(y)$ el costo de mantenimiento de una empresa para un nivel de producción anual y, con $C' > 0$ y $C'' > 0$. La empresa cambia su nivel de producción, de un valor y_1 durante una fracción λ de año $(0 < \lambda < 1)$, a otro valor y_2 durante la fracción $1-\lambda$ restante, de modo que su costo total anual es $\lambda C(y_1) + (1-\lambda)\,C(y_2)$. Se está considerando mantener un único nivel $Y = \lambda y_1 + (1-\lambda)\,y_2$ a lo largo de todo el año. ¿Es ésta una buena idea? Argumenta.

4. Los ejidatarios del Valle del Yaqui tienen una función de demanda $p = f(q)$, con $f' < 0$ y $f'' < 0$. Venden q_1 unidades en el ciclo de verano y $q_2 < q_1$ unidades en el de invierno, obteniendo un ingreso total de $q_1 f(q_1) + q_2 f(q_2)$. No hay costo de almacenaje. Para estabilizar precios el gobierno les pide que vendan $\frac{q_1+q_2}{2}$ en cada ciclo. ¿Es perjudicial, o benéfica, esta medida para los ejidatarios?

5. Utiliza la matriz hessiana para determinar si las siguientes funciones son cóncavas, convexas, estrictamente cóncavas, estrictamente convexas o ninguna de éstas:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2.$

(b) $f(x,y) = (x+y)^2$.

(c) $f(x,y) = -y^2$.

(d) $f(x,y) = x + y - e^x - e^{x+y}$.

(e) $f(x,y) = ye^x$, $y > 0$.

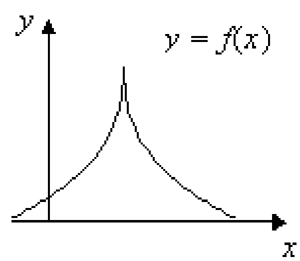
(f) $f(x,y) = ax^2 + by^2$, $\quad a, b < 0$.

(g) $f(x,y) = 6x + 2y$.

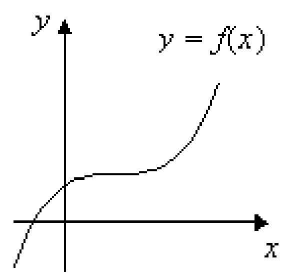
6. Sea $f(x,y) = -2x^2 + (2a+4)xy - 2y^2 + 4ay$. ¿Para qué valores de la constante a es f una función cóncava?¿Para qué valores de a es f una función convexa?

7. Para cada una de las siguientes funciones f en $\mathbb{R}^2$ determina si es cóncava, convexa, cuasicóncava o cuasiconvexa (recuerda que f puede presentrar varias de estas propiedades):

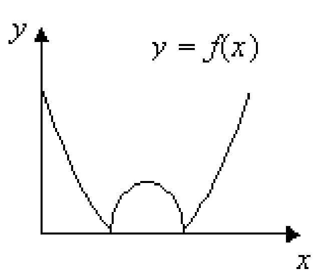
(a)



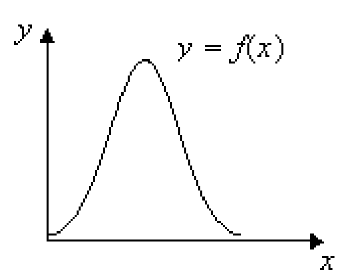
(b)



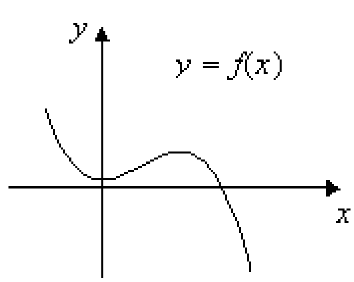
(c)



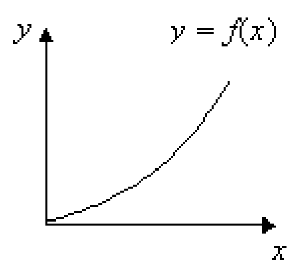
(d)



(e)



(f)



8. Para cada una de las siguientes funciones f en $\mathbb{R}^2$ encuentra los contornos $CS_f(1)$ y $CI_f(1)$:

   (a) $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2-x}.$

   (b) $f : (0, e^2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{2 - \ln x}.$

9. Muestra que $f(x) = \ln x$ es cuasicóncava y cuasiconvexa en $\mathbb{R}^+$.

10. Para cada una de las siguientes funciones f en $\mathbb{R}^3$ encuentra y grafica los contornos superior $CS_f(k)$ e inferior $CI_f(k)$, para un valor típico de k, y determina si f es cuasicóncava, cuasiconvexa, ambas o ninguna de éstas:

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2.$

    (b) $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2\ln x + 8\ln y.$

    (c) $f : \mathbb{R}^2_{+} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = -x - 4y.$

    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 4 - x^2 - y^2.$

    (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$

    (f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 1 - ye^{-x}.$

    (g) $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 16\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}.$

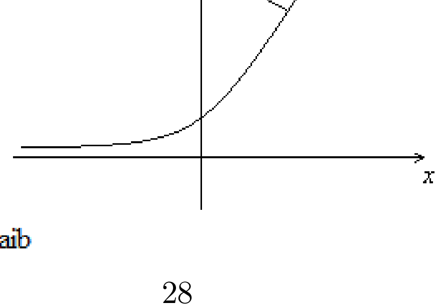
11. Para la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y + 1}$ encuentra y grafica:

    (a) Los contornos C_f, CS_f y CI_f correspondientes a $k = 1$.

    (b) Los contornos C_f, CS_f y CI_f correspondientes a $k = 0$.

    (c) Los contornos C_f, CS_f y CI_f correspondientes a $k = -1$.

12. La figura muestra una curva de nivel típica de una función $z = f(x,y)$ junto con la dirección del gradiente ∇f en esa curva. De acuerdo con esta información, puedes asegurar que f es: i) cóncava, ii) convexa, iii) cuasicóncava, iv) cuasiconvexa, v) algunas de las anteriores (¿cuáles?), vi) ninguna de éstas.



13. Argumenta por qué la función de utilidad $u(x, y, z) = \min \{x, máx \{y, z\}\}$ no es una función cuasicóncava.

14. Demuestra que una función de producción tipo Cobb-Douglas, $P(L, K) = L^a K^b$, $a, b > 0$, siempre es cuasicóncava en $\mathbb{R}^2_{++}$. Adicionalmente, si $a+b < 1$, entonces P es estrictamente cóncava, y si $a + b = 1$, entonces P es cóncava no estricta.

CÁLCULO II
TAREA 9
OPTIMIZACIÓN LIBRE. CRITERIO DEL HESSIANO
(Tema 5.1)

1. Halla los puntos críticos de la función $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

2. Encuentra y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y) = x^2 + 2xy$.

   (b) $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$.

   (c) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

   (d) $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 3y$.

   (e) $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + xy + \dfrac{1}{y}, \quad x \neq 0, \ y \neq 0.$

3. Encuentra y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y) = 1 - x^2$.

   (b) $f(x, y) = x^4 + y^4$.

   (c) $f(x, y) = \frac{1}{12}(x + y)^4$.

   (d) $f(x, y) = y^4$.

4. Encuentra los máximos, mínimos o puntos silla de $f(x, y)$, si se sabe que $f_x = 9x^2 - 9$ y $f_y = 2y + 4$.

5. Sea $f(x, y) = ax^2 + y^2 - 2y$, con $a \neq 0$. Encuentra y clasifica los puntos críticos de f.

6. Sea $f(x, y) = ax^2 + ay^2 - 2xy - 2x + 5$, con $|a| \neq 1$. Encuentra y clasifica los puntos críticos de f.

7. Sea $f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$. Halla los valores de a, b y c tales que $f(x, y)$ tenga un mínimo local $f_{\min} = -\frac{1}{9}$ en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

8. Sea $\Pi(v_1, v_2) = pv_1^{1/3}v_2^{1/2} - q_1v_1 - q_2v_2$ una función de beneficio, con $p, q_1, q_2, v_1, v_2 > 0$.

   (a) Encuentra los niveles v_1, v_2, que maximizan el beneficio y encuentra el beneficio máximo.

   (b) Verifica que efectivamente se trata de un máximo.

CÁLCULO II
TAREA 10
OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA. TEOREMA DE LA ENVOLVENTE
(Temas 5.2-5.4)

1. Encuentra y clasifica los valores extremos de las siguientes funciones sujeto a restricciones de igualdad:

   (a) $f(x,y) = 2x + y$ s.a. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$.

   (b) $f(x,y) = ax + y$ s.a. $a - \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \qquad (a > 1)$.

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ s.a. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \qquad (a, b > 0)$.

   (d) $f(x,y,z) = x + y + z$ s.a. $y^2 + z^2 = 1,\ x + z = 2$.

2. Encuentra y clasifica el punto que optimiza $f(x,y) = 10x^{1/2}y^{1/3}$ sujeto a $2x + 4y = I$, con $I > 0$ un parámetro. Si $f^*(I)$ denota el valor óptimo de f, verifica que $df^*/dI = \lambda^*$.

3. Encuentra y clasifica el valor extremo de $f(x,y) = -2x + 2y$ sujeto a $y - \ln x = 1$. Si f^* denota el valor óptimo de f, aproxima el cambio en f^* si se utiliza $y - \ln x = 1.15$ como nueva restricción.

4. Resuelve los siguientes problemas de optimización con restricciones de igualdad:

   (a) máx $f(x,y) = -x^2 - y^2$ s.a. $ax + y = 1$, con $a > 0$ un parámetro. Si $f^*(a)$ denota el valor máximo de f, con el teorema de la envolvente determina df^*/da.

   (b) mín $C(x,y) = ax + by$ s.a. $\ln x + y = 1$, con $a,\ b > 0$ parámetros. Si $C^*(a,b)$ denota el valor mínimo de C, con el teorema de la envolvente determina $\partial C^*/\partial a$ y $\partial C^*/\partial b$.

   (c) mín $f(x,y) = x + ay$ s.a. $\ln(xy) = a$, con $a > 0$ un parámetro y $x, y > 0$. Si $f^*(a)$ denota el valor mínimo de f, con el teorema de la envolvente determina df^*/da.

5. En relación con los incisos del problema 4, presenta un argumento para justificar que efectivamente se trata de un máximo o de un mínimo, según proceda.

6. Sea $U(x, y)$ una función de utilidad y sean p_1, p_2, los precios de los bienes x, y. Se desea maximizar la utilidad, dado un presupuesto I, es decir,

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad U(x, y) \\ \text{s.a.} \quad &p_1 x + p_2 y = I, \end{aligned}$$

con (x, y) las variables de decisión y (p_1, p_2, I) las variables exógenas. Se define la función de utilidad máxima, o función valor, como

$$V(p_1, p_2, I) = U(x^*(p_1, p_2, I), y^*(p_1, p_2, I)),$$

en donde $x^*(p_1, p_2, I), y^*(p_1, p_2, I)$ es la solución del problema. Prueba que en óptimo se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial V(p_1, p_2, I)}{\partial p_1} = -\lambda^* x^*,$$
$$\frac{\partial V(p_1, p_2, I)}{\partial p_2} = -\lambda^* y^*$$
$$\frac{\partial V(p_1, p_2, I)}{\partial I} = \lambda^*.$$

7. Para la función de utilidad en cada inciso, resuelve el problema máx $U(x, y)$ s.a. $p_1 x + p_2 y = I$, con $p_1, p_2, I > 0$ parámetros $(x, y > 0)$ y luego determina $\partial V / \partial p_1$, $\partial V / \partial p_2$ y $\partial V / \partial I$:

   (a) $U(x, y) = \dfrac{1}{2} \ln x + \dfrac{1}{2} \ln y.$

   (b) $U(x, y) = y + \ln x.$

   (c) $U(x, y) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}.$

   (d) $U(x, y) = 100 - e^{-x} - e^{-y}.$

8. Considera el problema de maximización del beneficio

$$\text{máx} \quad \pi(L, K; a, b, w, r, p) = p(a \ln L + b \ln K) - wL - rK,$$

con $a, b, w, r, p > 0$ parámetros.

   (a) Encuentra los niveles óptimos (L^*, K^*) y el beneficio máximo $\Pi(a, b, w, r, p)$.

   (b) Con el teorema de la envolvente determina $\partial \Pi / \partial a$.

9. Sea $f(x_1, x_2)$ una función de producción y sean w_1, w_2, los precios de los insumos $x_1, x_2 \geq 0$. Se desea maximizar beneficios, dado un nivel de producción q, es decir,

$$\text{máx} \;\; pq - (w_1x_1 + w_2x_2)$$

$$\text{s.a.} \quad f(x_1, x_2) = q,$$

con (x_1, x_2, q) las variables de decisión y (w_1, w_2, p) las variables exógenas. Se define la función de beneficio máximo como

$$\Pi(w_1, w_2, p) = pq^*(w_1, w_2, p) - w_1x_1^*(w_1, w_2, p) - w_2x_2^*(w_1, w_2, p),$$

en donde $x_1^*(w_1, w_2, p)$, $x_2^*(w_1, w_2, p)$ y $q^*(w_1, w_2, p)$ es la solución del problema. Prueba que en el óptimo se cumplen las siguientes relaciones (Lema de Hotelling):

$$\frac{\partial \Pi(w_1, w_2, p)}{\partial p} = q^*(w_1, w_2, p)$$
$$\frac{\partial \Pi(w_1, w_2, p)}{\partial w_i} = -x_i^*(w_1, w_2, p), \qquad i = 1, 2.$$

10. Demuestra que con el método de Lagrange no puedes encontrar el punto que maximiza $f(x, y) = -x^2 - y^2$ sujeto a $(x-1)^3 - y^2 = 0$. Encuentra el óptimo utilizando el método gráfico. Justifica por qué el método de Lagrange falla en este ejemplo.

11. En los siguientes problemas de optimización con restricciones de desigualdad: i) escribe el problema en un formato adecuado, ii) escribe la función lagrangeana y las condiciones correspondientes de Kuhn-Tucker, iii) dibuja la región factible y algunas curvas de nivel de la función f, y iv) usa la información del inciso anterior para encontrar rápidamente la solución óptima.

    (a) mín $f(x, y) = (x-4)^2 + (y-4)^2$ s.a. $x + y \leq 5$, $x, y \geq 0$.
    (b) máx $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ s.a. $x + y \leq 3$, $2x + 3y \geq 6$, $x \geq 0$.
    (c) mín $f(x, y) = (x-4)^2 + (y-4)^2$ s.a. $x + y \geq 5$, $x \leq 6$, $2y \leq 11$.
    (d) máx $f(x, y) = -x - y$ s.a. $x^2 + y \leq 1$, $-x^2 + 2x + y \geq 1$.
    (e) máx $f(x, y) = x + \sqrt{y}$ s.a. $y \geq x$, $x + y \leq 2$, $x \geq 0$.
    (f) máx $f(x, y) = 2y - x$ s.a. $x + 2y \leq 6$, $x^2 + y^2 \leq 8$, $x, y \geq 0$.

12. Considera el problema de maximización de la utilidad
$U(x, y) = \ln x + y$ sujeto a $p_1 x + p_2 y \leq I$, $y \geq 0$, con $p_1, p_2, I > 0$ parámetros (claramente, $x > 0$). Demuestra que la posición del óptimo (x^*, y^*) depende de si $I > p_2$ o $I \leq p_2$. En cada uno de estos casos analiza el comportamiento de la curva de ingreso-consumo $(x^*(I), y^*(I))$.

13. Considera el problema de maximización de la utilidad
$U(x, y) = x + \sqrt{y}$ sujeto a $p_1 x + p_2 y \leq I$, $x \geq 0$, con $p_1, p_2, I > 0$ parámetros (claramente, $y \geq 0$). Demuestra que la posición del óptimo (x^*, y^*) depende de si $I > p_1^2/4p_2$ o $I \leq p_1^2/4p_2$. En cada uno de estos casos analiza el comportamiento de la curva de ingreso-consumo $(x^*(I), y^*(I))$.

CÁLCULO II
TAREA 11
FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$. REGLA DE LA CADENA.
TEOREMA GENERAL DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA
(Temas 6.1-6.3)

1. Los siguientes incisos definen diferentes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Para cada función identifica los valores correspondientes de n y m. Luego escribe una expresión para la derivada de la función:

   (a) $f(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$.

   (b) $F(t) = (t, t^2, 1)$.

   (c) $u(x_{1,\ldots,}x_k) = \sum_{I=1}^{k} \alpha_i \ln x_i$.

   (d) $x + y + z = 1$.

   (e) $(x, y) = (\alpha + 3\ln\beta - \gamma^2, \dfrac{\alpha\beta}{\gamma})$.

   (f) $F(x, y) = (e^{x-y}, x - y, y^3, 7)$.

2. Considera las funciones de demanda $q_1 = 6p_1^{-2}p_2^{3/2}y,\ q_2 = 4p_1p_2^{-1}y^2$, donde p_1, p_2 y y varían respecto al tiempo t de acuerdo con las ecuaciones $p_1 = \sqrt{12t},\ p_2 = t^2,\ y = t - 1$. Sean $F(p_1, p_2, y) = (q_1, q_2)$, $G(t) = (p_1, p_2, y))$ y $H = F \circ G$.

   (a) Identifica los valores de k y n para la composición $H = F \circ G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ y proporciona la regla de correspondencia de H.

   (b) Encuentra una expresión para la derivada $DH(t)$

   (c) Evalúa $H(t)$ y $DH(t)$ en $t = 3$ e interpreta el resultado.

3. Considera las funciones de demanda $q_1 = 6p_1^{-2}p_2^{3/2}y,\ q_2 = 4p_1p_2^{-1}y^2$, donde p_1, p_2 y y varían respecto al tiempo t y a la tasa de interés r de acuerdo a las ecuaciones $p_1 = \sqrt{12t}, p_2 = 10rt^2, y = 20r$. Sean $F(p_1\ , p_2\ , y) = (q_1, q_2)$, $G(t, r) = (p_1\ , p_2\ , y)$ y $H = F \circ G$.

   (a) Identifica los valores de k y n para la composición $H = F \circ G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ y proporciona la regla de correspondencia de H.

   (b) Encuentra una expresión para la derivada $DH(t, r)$.

   (c) Evalúa $H(t, r)$ y $DH(t, r)$ en $t = 3, r = 0.1$ e interpreta el resultado.

4. Sean $F(w,i,r,Q) = (L(w,i,r,Q), K(w,i,r,Q), T(w,i,r,Q))$ y $G(t,s) = (w(t,s), i(t,s), r(t,s), Q(t,s))$. Haz un diagrama y escribe el producto de matrices para la derivada $D(F \circ G)$.

5. Determina bajo qué condiciones las ecuaciones $x + y = uv$ y $xy = u - v$ definen implícitamente a x y v como funciones diferenciables de u y y. En ese caso, utiliza el teorema general de la función implícita para encontrar las derivadas parciales $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial u}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

6. Determina bajo qué condiciones las ecuaciones $Qe^Q - KL = 0$ y $K + L - m = 0$ definen implícitamente a Q y m como funciones diferenciables de L y K, donde $Q, m, L, K > 0$. En ese caso, determina $\dfrac{\partial Q}{\partial K}$.

7. Sea $f(x,y) = \dfrac{ax^2}{2} + xy^2 + x + y$, con $a > 0$ un parámetro.

   (a) Escribe (no resuelvas) las condiciones de primer orden que debe satisfacer el punto óptimo $x^*(a), y^*(a)$.

   (b) Suponiendo que las ecuaciones del inciso (a) definen implícitamente a x^* y y^* como funciones diferenciables de a, encuentra $\dfrac{dx^*(a)}{da}$ y $\dfrac{dy^*(a)}{da}$.

8. Sea $f(x,y) = ae^x - be^y - x^2 + y^2$, con $a, b > 0$ parámetros.

   (a) Escribe (no resuelvas) las condiciones de primer orden que debe satisfacer el punto óptimo $x^*(a,b), y^*(a,b)$.

   (b) Suponiendo que las ecuaciones del inciso (a) definen implícitamente a x^* y y^* como funciones diferenciables de a y b, encuentra $\dfrac{\partial x^*}{\partial a}$.

9. Considera el problema de maximización de $ax + by$ sujeto a $x^4 + y^4 = c$, con a, b y c parámetros.

   (a) Demuestra que las condiciones de primer orden conducen al sistema

$$\begin{aligned} ay^3 - bx^3 &= 0 \\ x^4 + y^4 &= c. \end{aligned}$$

(b) Suponiendo que el sistema anterior define a x y a como funciones de y, b y c, utiliza el teorema general de la función implícita para encontrar $\dfrac{\partial x}{\partial y}$.

10. Sea $Q(L, K)$ la función de producción de una empresa y sean p, w y r los precios por unidad del producto, el trabajo y el capital, respectivamente. La función de beneficio de la empresa esta dada por $\pi(L, K) = pQ(L, K) - wL - rK$.

    (a) Escribe las condiciones de primer orden que deben satisfacer los niveles óptimos L^* y K^* de los factores de la producción.

    (b) Escribe las condiciones de segundo orden que efectivamente garantizan que los niveles del inciso anterior maximizan (localmente) los beneficios.

    (c) Con el teorema general de la función implícita demuestra que el sistema de ecuaciones del inciso (a) define implícitamente a los niveles óptimos L^* y K^* como funciones diferenciables de los precios p, w y r. Obtén fórmulas para $\dfrac{\partial K}{\partial p}$ y $\dfrac{\partial L}{\partial r}$.