Cálculo Diferencial e Integral I

Laboratorio 6 - Continuidad y el TVI

Otoño 2017 - ITAM

1. Sea $R(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$ una funciíon racional. Justifica convincentemente que $R(x)$ es continua en todo $x_0 \in \mathbb{R}$ en donde el denominador no se anula.

2. Prueba formalmente que si f es continua en x_0 y $f(x_0) \neq -1$ entonces $g(x) = \frac{2f^2(x)+5f(x)+3}{f(x)+1}$ es continua en x_0.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Supón que f es continua en 0. Prueba formalmente (ε y δ) que f es continua en todo punto x_0. (Sugerencia: Debes de probar que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Nota que $f(0) = 0$ y que: $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(h) - f(0)$).

4. Pruebe que existe $c \in (-3, 4)$ tal que: $\frac{c^2+1}{c+3} + \frac{c^4+1}{c-4} = 0$.

5. Determina un intervalo de longitud igual a 1 en donde la ecuación: $x^5 + 4x^2 - 7x + 14 = 0$ tiene una solución.

6. Prueba que la ecuación: $\frac{sen(x)}{x} = \frac{1}{2}$ tiene dos soluciones en $\mathbb{R} \quad (x \neq 0)$.

7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \frac{1}{3}f(a) + \frac{2}{3}f(b)$. (Usa el TVI).

8. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que: $f(0) = 0 = f(1)$. Prueba que para cada $l \in [0, 1]$ existe un punto $P_l = (c, f(c))$ sobre la gráfica de f tal que la longitud del segmento de recta que une el origen con P_l es igual a l. (Dibuja).

9. Determina un intervalo cerrado $[a, b]$ de longitud menor que $\frac{1}{2}$ en el que la ecuación: $x^4 - x^{-1} + 1 = 0$ tiene una solución.