**INTRODUCCIÓN A LAS MATEMATICAS SUPERIORES**

**TEMA 6**

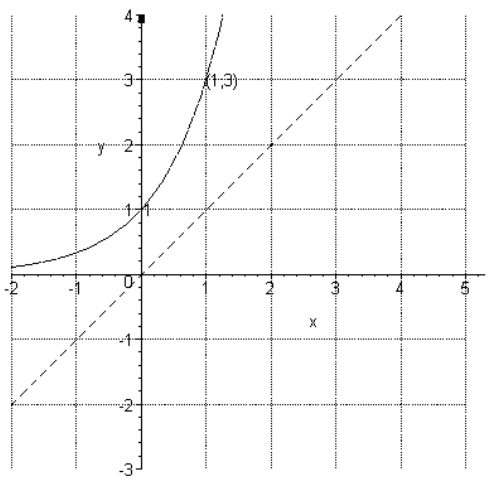
**FUNCIONES LOGARÍTMICAS**

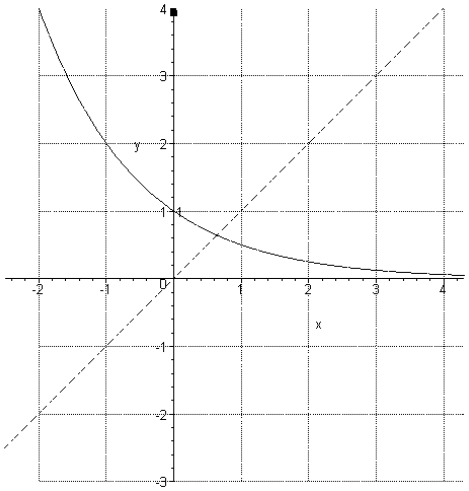
**Una función exponencial de base** $a$ tiene la forma $f(x)=a^x$ para toda $x\in R$ donde $a>0$ y $a\neq 1$. Si la base es $e$ se llama exponencial natural tiene la forma $f(x)=e^x$.

L1.- ¿Con la información que cuenta de las funciones exponenciales puede determinar si existe la inversa de una función de ese tipo? Si ésta existe ¿Por qué?, indicar su dominio e imagen.

L2.- Determinar a qué función exponencial corresponde cada una de las gráficas y dibujar su inversa.

En cada caso indicar el dominio y la imagen de la inversa, dónde es positiva, dónde negativa y a qué valor tiende cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$.




A la inversa de la función $f(x)=a^x$, se le llama logaritmo de base *a* y se denota por $f(x)=\log_a x$.

**La función** $y=\log_a x$.

Def. **Logaritmos base *a*** Para toda $a>0$, $a\neq 1$, $\log_a x=y \iff a^y=x$. Esto es, el valor de la función logaritmo base *a* corresponde al exponente al que hay que elevar la base para obtener el valor de *x*.

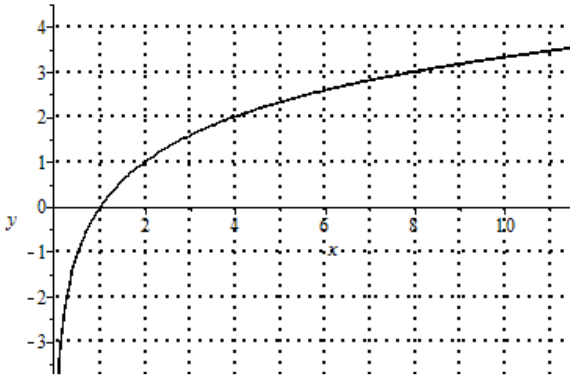
Si la base del logaritmo es *e* se llama **logaritmo natural** y se representa como $\ln(x)$, si la base del logaritmo es 10 se llama **logaritmo común** y se denota como $\log x$.

L3.- Determinar el valor de

a) $\log_2(16)$ b) $\log(100)$ c) $\log(0.01)$ d) $\log_2(2)$

e) $\log_2(1)\ln(e)$ f) $\ln(1/e)$ g) $\ln(\sqrt{e})$ h) $\ln(1)$

L4.- A partir de la gráfica que se presenta a continuación realizar las operaciones gráficas que se solicitan en los incisos a) a c) y proporcionar la regla de correspondencia de la función que representa la gráfica original y cada una de las obtenidas en los incisos.




a) desplazar la gráfica de la función una unidad verticalmente hacia arriba,
b) desplazar la gráfica de la función obtenida en el inciso anterior, 2 unidades hacia la derecha,
c) reflejar con respecto al eje $x$ la gráfica obtenida en b).

L5.- Graficar las funciones que se presentan a continuación e indicar el dominio y la imagen de cada una de ellas:

a) $y=\log_2 x$ b) $y=\log x$ c) $y=\log_3(-x)$

d) $y=\ln x$ e) $y=\log_2(x+3)$ f) $y=-3\log_3 x$

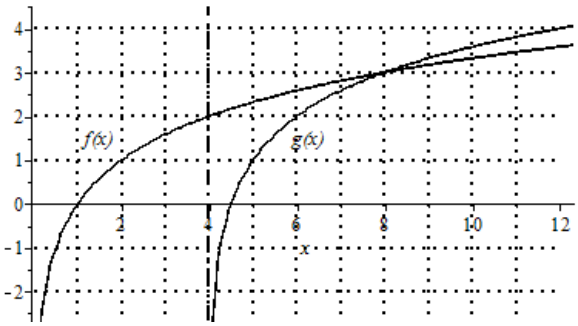
g) $y=3+\log_{10} x$ h) $y=4\log_2(x+1)-3$ i) $y=-2+\ln x$

j) $y=7+\log_2(x-5)$ k) $h(x)=|\ln(x-2)|$ l) $h(x)=\ln|x-2|$

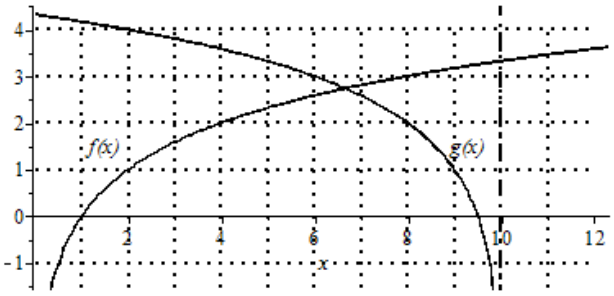
m) $f(x)=\begin{cases}\log(-x) & si \quad x\le -1\\ \ln(x-1) & si \quad x>0\end{cases}$ n) $y=\ln\sqrt{x}$

L6.- Indicar la sucesión de operaciones gráficas utilizadas para transformar la gráfica de $f(x)$ en la de $g(x)$ y expresar analíticamente ambas funciones.

a)

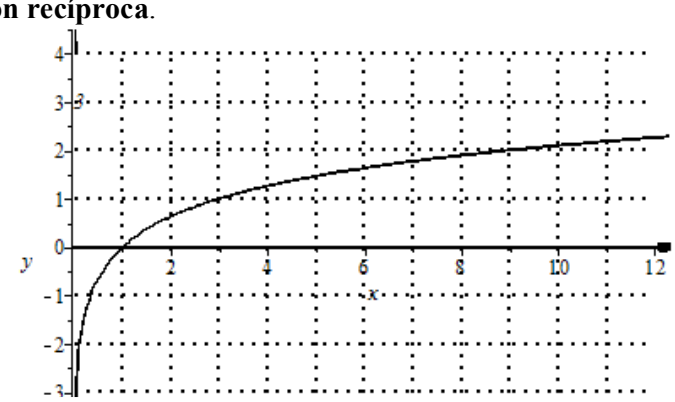


b)

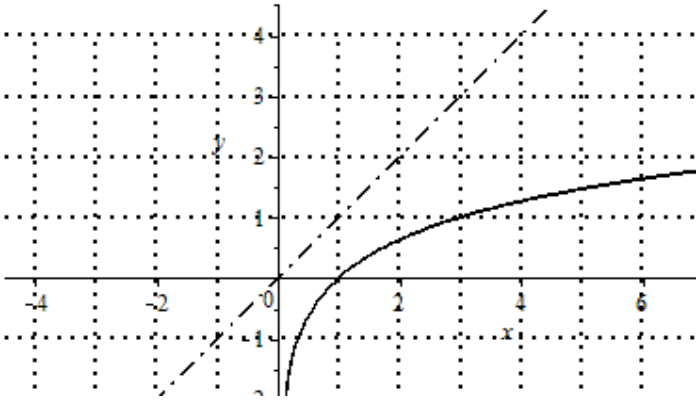



L7.- a) Proporcionar la regla de correspondencia de la función que aparece graficada abajo.

b) Dibujar, determinar el dominio, el rango y regla de correspondencia de su **función recíproca**.




c) Dibujar, determinar el dominio, el rango y regla de correspondencia de su **función inversa**.




L8.- Determinar el valor al que tiende $y = \ln(8x+2)$ si

a) $x \to 0$ b) $x \to \frac{-1^+}{4}$ c) $x \to \infty$ d) $x \to \frac{-1^+}{8}$

L9.- Completar

a) $2\log(2) \underset{<,>,=}{___} 3\log(2)$ b) $2\log_{1/2}(5) \underset{<,>,=}{___} 3\log_{1/2}(5)$

c) $\log(2) \underset{<,>,=}{___} \log(3)$ d) $\log_{1/2}(5) \underset{<,>,=}{___} 3\log_{1/2}(7)$

L10.- Determinar el dominio, el rango y la regla de correspondencia de la **función recíproca** y de la **función inversa** de las funciones que aparecen a continuación.

a) $y = e^x$ b) $y = \left[\frac{1}{2}\right]^x$ c) $y = 2\left(3^x\right)$

d) $y = \log x$ e) $y = -\log_3 x$ f) $y = \log_{1/2}(x+3)$

L11.- En cada inciso determinar el dominio de la función

a) $y = \ln(3-x)$ b) $y = \sqrt{\ln x}$ c) $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$

d) c) $y = \ln|x|$ e) $f(x) = \ln\sqrt{t^2 - 1}$ f) $g(x) = \frac{1}{\ln x}$

g) $f(x) = \ln\left(e^x + 1\right)$ h) $y = \frac{\ln(3x+7)}{x-8}$ i) $y = \ln\left(\frac{3x-1}{1-x}\right)$

j) $g(x) = \ln(\ln(x))$ k) $g(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))}$ l) $y = 10^{\ln(x+5)}$

Algunas propiedades de los logaritmos son:

1. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$; 2. $\log_a a^x = x$, para toda $x$ en $R$.

L12.- ¿Por qué hay restricciones diferentes para $x$ en las propiedades arriba mencionadas'

L13.- En cada inciso simplificar indicando el dominio.

a) $e^{\ln(2x)}$ b) $\ln\left(e^{\ln x}\right)$ c) $10^{\log(x+5)}$ d) $\log_2\left(4^w\right)$

**Tarea** del Swokowski Sec.5.4 problemas 15 a 20, 37 a 54, Sec.5.5 problemas 39 a 54.

**Propiedades**

Si $a > 0$, $a \neq 1$, $y = \log_a x$. Sean $x > 0$, $y > 0$ $x, y \in R$

1.- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ 2.- $\log_a\left(x^y\right) = y\log_a(x)$

3.- $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$ 4.- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

5.- $\log_a a = 1$ 6.- $\log_a(1) = 0$

L14.- Expresar en términos de ln(5) y ln(7),

a) $\ln\left(\frac{1}{125}\right)$ b) ln(9.8) c) $\ln\left(7\sqrt{7}\right)$ d) ln(0.056)

L15.- Encontrar las expresiones más sencillas para las cantidades en cada inciso.

a) $e^{-\ln 0.5}$ b) $e^{3\ln x - \ln 7}$ c) $\exp\left(\ln\left(x^2\right) - 2\ln y\right)$.

d) $\ln(e)$ e) $\log(1)$ f) $\log_2\left(4^3\right)$

L16.- Expresar $y$ en términos del logaritmo de la variable correspondiente.

a) $y = \ln(5x)$ b) $y = \ln\left(t^{5/3}\right)$ c) $y = (\log(x))^4$

d) $y = \log\left(\dfrac{t \sin t}{t+1}\right)$ e) $y = \ln\left(\dfrac{(3x-7)(x+5)^{15}}{x^3\left(\sqrt{x+3}\right)}\right)$ f) $y = t\sqrt{\ln(t+2y)}$

g) $y = \ln\left(3\theta^2 e^{-\theta}\right)$ h) $y = \ln\left(\dfrac{et \sin t}{e^t(t+1)}\right)$ i) $y = \ln\left(\dfrac{3x-1}{1-x}\right)$

L17.- Expresar como un solo logaritmo.

a) $\ln(\sec\theta) + \ln(\cos\theta)$ b) $\ln(8x + 4) - 2\ln(2)$ c) $3\ln\sqrt[3]{t^2-1} - \ln(t+1)$

L18.- (TAREA) Encontrar las expresiones más sencillas para las cantidades en cada inciso.

a) $e^{\ln\left(x^2+y^2\right)}$ b) $\ln\left(e^{5\ln x}\right)$ c) $\log(10)$

d) $\ln\left(e^{\theta}\right) - e^{\ln\theta}$ e) $\ln\left(e^{e^x}\right)$ f) $\ln(1)$

g) $2^{\log_2 3}$ h) $\pi^{\log_\pi 7}$ i) $\log_{11} 121$

j) $\log_{121} 11$ k) $\log_3 \dfrac{1}{9}$ l) $\log\left((1000)^{-2}\right)$

m) $5^{\log_5(3x^2)}$ n) $\log_e(e^x)$ o) $\log_4(4^{e^x \sin x})$

L19.- Cambiar a forma logarítmica.

a) $3^2 = 9$ b) $2^{-3} = 1/8$ c) $5^{2x} = y - z$ d) $e^{\theta} = 3m + 1$

L20.- Cambiar a forma exponencial.

a) $\log_3(9) = 2$ b) $\log(0.1) = -1$ c) $\log_b(35) = x + 2$ d) $\log w = q$

**Tarea** del Swokowski Sec.5.4 problemas 1 a 4, 11 a 14, Sec.5.5 problemas 1 a 16.

L21.- En cada inciso resolver la ecuación (cuidado con el dominio).

a) $\log(x-3) = \log(7-2x)$ b) $8^{\log_8 3} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)}$

c) $\log_2(x-3) = 1$ d) $\ln\left(\sqrt{x}-5\right) = 0$

e) $\ln\left(e^{\theta}\right) - e^{\ln\theta} = 0$ f) $\dfrac{x^2 \ln(x+3)}{x^2+1} = 0$

g) $\log\left(\sqrt{x}\right) = -1$ h) $\log_3(x) = -3$

i) $\log_5(5^{x-3}) = 2$ j) $\log_x\left(e^2\right) = 2$

k) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{-t^2} = \dfrac{1}{8}$ l) $\ln\left(x^2\right) = 16$

m) $x - 1 = \log_7\left(\sqrt[5]{7^3}\right)$ n) $\log_3\left(x^3+5\right) = -4$

o) $\log_2(x^2+4)=2\log_2(x-2)$ p) $e^{2x-5}=2$

q) $\log_2(x+4)=\log_2(x-2)+3$ r) $7^{x-3}=5^{2x+1}$

s) $\log_2(x^2-4)=\log_2(x-2)+3$ t) $\log_5(7^{x-3})=2$

L22.- (TAREA) Resolver las ecuaciones indicadas a continuación (**cuidado con el dominio**):

a) $\log(x)=1-\log(x-3)$ b) $\log_2(x^2-10x+18)=1$

c) $\log_4(-x)+\log_4(6-x)=2$ d) $2^{-x^2}=5$

e) $5(7^x)=6(8^x)$ f) $0.182^x=0.93$

g) $\log(x^2+4)-\log(x+2)=3+\log(x-2)$ h) $4^x-4^{x-1}=3^{x+1}-3^x$

i) $Ae^{yt}=Be^{st}$ donde $A>0$, $B>0$ y $y\neq s$

L23.- Resolver las desigualdades que aparecen en cada inciso. (**Cuidado con el dominio**)

a) $\log(x-3)>\log(7-2x)$ b) $\log_2(x-3)\geq 1$ c) $\log_2[x(x-3)]\leq 0$

d) $\ln(x)<0$ e) $\ln(x)>0$ f) $\dfrac{x^2\ln(x+3)}{x^2+1}\leq 0$

g) $\log(x)>2$; h) $\log_3(x)\geq 1$ i) $\log_2(x)\leq -1$

j) $\log_{1/3}(x)>2$ k) $\log_{1/2}(x)\leq -1$ l) $\log_{1/e}(x^2-x-1)\geq 0$

L24.- En cada inciso despejar la variable que se indica.

a) $y$, $\ln(1-2y)=t$ b) $y$, $e^{ky}=1/10$

c) $t$, $P=B+Ae^{rt}$ d) $t$, $P=B+2^{rt-d}$

e) $t$, $Ae^{yt}=Be^{st}$ donde $A>0$, $B>0$ y $y\neq s$.

f) $y$, $\ln(y^2-1)-\ln(y+1)=\ln(\sin(x))$.

**Tarea** del Swokowski Sec.5.4 problemas 5 a 10, 21 a 35, Sec.5.5 problemas 17 a 38.

L25.- Leer con cuidado la demostración de la fórmula para calcular $\log_a x$.

$$a^{\log_a x}=x \quad\Rightarrow\quad \ln a^{\log_a x}=\ln x \quad\Rightarrow\quad (\log_a x)(\ln a)=\ln x \quad\Rightarrow\quad \log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

L26.- Plantear como un cociente de logaritmos naturales o de logaritmos comunes y usar la calculadora para determinar:

a) $\log_5 8$ b) $\log_7 0.15$ c) $\log_{0.5} 9$ d) $\log_2 24$ e) $\log_{12} 3$

L27.- Expresar como cocientes de logaritmo natural y simplificar:

a) $\dfrac{\log_{16} x}{\log_4 x}$ b) $\dfrac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ c) $\dfrac{\log_a b}{\log_b a}$

**Factores de conversión** Sean $a > 0$ y $a \neq 1$, $b > 0$ y $b \neq 1$ la ecuación para convertir logaritmos base *a* a logaritmos base *b* es $\log_b x = \dfrac{\ln a}{\ln b} \log_a x$.

L28.- Leer con cuidado la demostración de $\log_b x = \dfrac{\ln a}{\ln b} \log_a x$.

Demostración Como $a > 0$ y $a \neq 1$ entonces $\dfrac{\ln a}{\ln b} \log_a x = \dfrac{\ln a}{\ln b} \dfrac{\ln x}{\ln a} = \log_b x$

L29.- Resolver (**Cuidado con el dominio**)

a) $\log_4(x) - \log_8(x) = 1$ b) $\log(\log(x)) = 2$ c) $\log(x^3) = (\log(x))^3$

d) $\log\left(\sqrt{x^3 - 9}\right) = 2$ e) $\log\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\log(x)}$ f) $e^x + 4e^{-x} = 5$

L30.- Despejar *x* en cada inciso.

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ b) $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}}$ c) $A_x = A_0\left(1 + \dfrac{r}{k}\right)^{kx}$

L31.- ¿Para qué valores de *x* la ecuación $e^{\ln(2x-3)} = 2x - 3$ es verdadera?

**Tarea** del Swokowski Sec.5.6 problemas 1 a 45. Ejercicios de repaso 7 a 52, 55,56