INTRODUCCIÓN A LAS MATEMATICAS SUPERIORES

FUNCIONES EXPONENCIALES

Una función exponencial de base a tiene la forma $f(x)=a^x$ para toda $x\in R$ donde $a>0$ y $a\neq 1$.

E1.- Indicar cuáles de las funciones que aparecen a continuación no corresponden a una función exponencial.

a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=3^x$ c) $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

d) $f(x)=x^x$ e) $f(x)=\left(\sqrt{3}\right)^x$ f) $f(x)=x^{\sqrt{2}}$

E2.- Para las funciones que aparecen a en cada inciso determinar:

i) el dominio y la imagen de la función,
ii) las intersecciones con los ejes,
iii) los intervalos en los que la función es creciente y en los que es decreciente,
iv) los intervalos en los que la función es positiva y en los que es negativa,
v) qué ocurre cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$,
vi) graficar.

a) $f(x)=2^x$ b) $f(x)=3^x$ c) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ d) $f(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

La base natural *e*

Un número irracional, representado con la letra *e*, aparece como base en muchas aplicaciones de funciones exponenciales. El número *e* se define como el valor al que se aproxima $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ cuando $n\to\infty$. El valor de *e* con 9 cifras decimales es $e\approx 2.718281827$. A e se le llama base natural y a $f(x)=e^x$ se le llama **función exponencial natural**. Se puede hacer una tabla con los valores de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ para n=1, 2, 10, 100 … , 1×10^9, etc. Para ir observando como el número al que tiende la expresión se acerca a *e*.

E3.- Bosquejar la función $f(x)=e^x$.

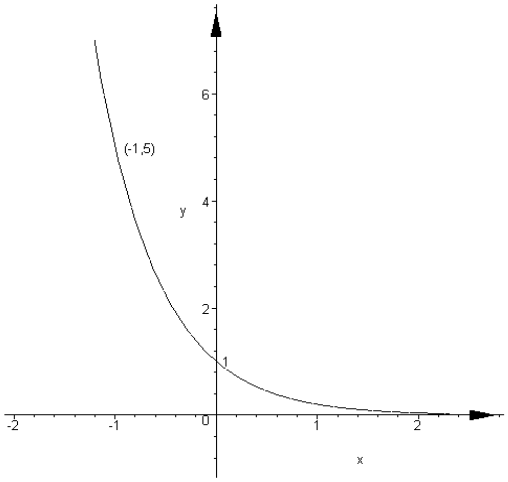
E4.- Utilizando operaciones gráficas bosquejar las funciones que aparecen a continuación.

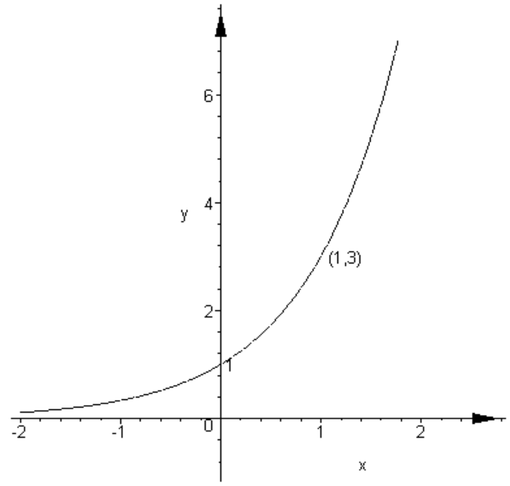
a) $f(x)=2^{x-3}$ b) $f(x)=3^{-x}$ c) $f(x)=2^{|x|}+3$

d) $f(x)=-2^x$ e) $f(x)=3e^{x-1}+2$ f) $f(x)=-e^x$

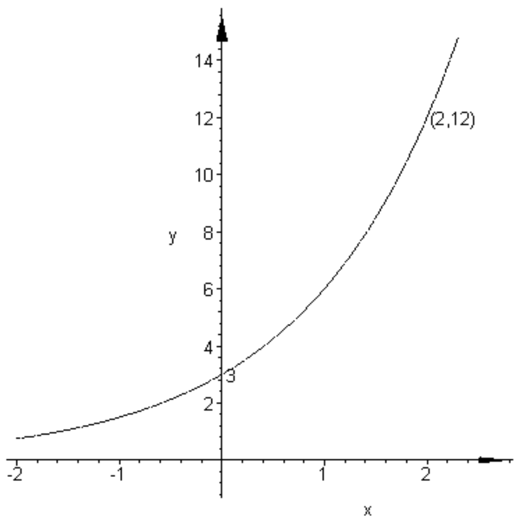
g) $f(x)=e^{-x}$ h) $f(x)=3\left(2^{x-1}\right)$

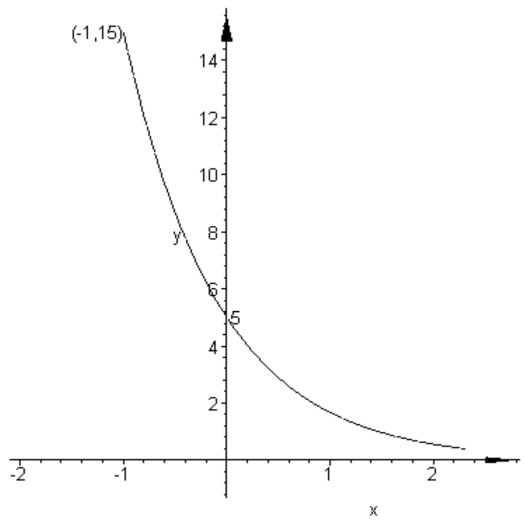
E5.- Proporcionar la función $f(x) = a^x$ que corresponde a cada gráfica.



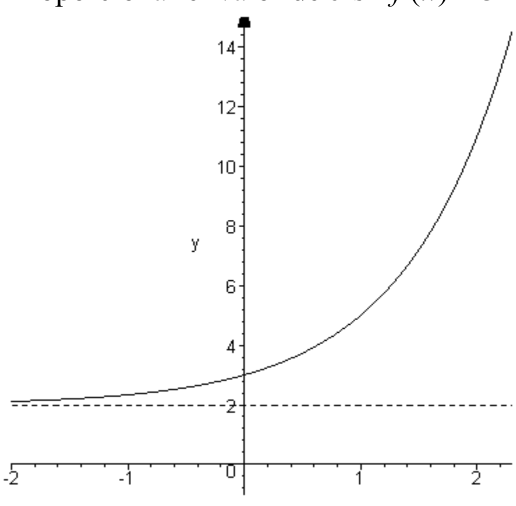


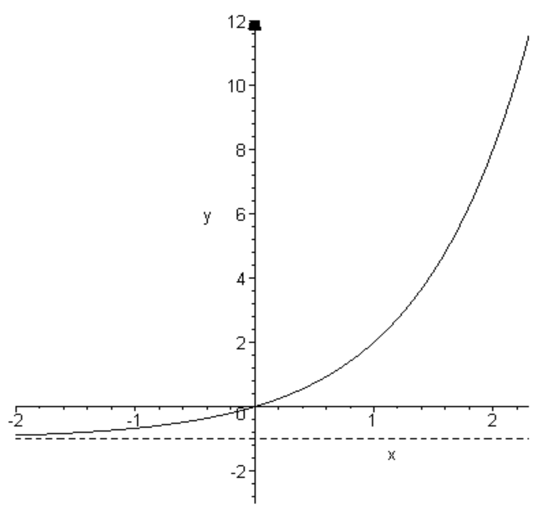
E6.- Proporcionar la función $f(x) = Ca^x$ que corresponde a cada gráfica.





E7.- Proporcionar el valor de b si $f(x) = 3^x + b$ en cada caso.





E8.- Encontrar el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

a) $f(x)=2^{x-3}$ b) $f(x)=3^{\sqrt{7x-2}}$ c) $f(x)=\sqrt{2^x+3}$

d) $f(x)=-e^x$ e) $f(x)=3e^{x-1}+2$ f) $f(x)=\dfrac{5-2^x}{2^x-1}$

g) $f(x)=\dfrac{5-e^x}{e^x+1}$ h) $f(x)=e^{-x}$ i) $f(x)=\sqrt{2^x-1}$

Tarea del Swokowski Sec.5.2 problemas 11 a 32. Sec. 5.3 problemas 1 a 4, 15 a 18..

Propiedades: Sean $x, y \in R$ y $a>0$

1.- $a^x a^y = a^{x+y}$ 2.- $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$ 3.- $\dfrac{1}{a^x}=a^{-x}$,

4.- $\dfrac{a^y}{a^y}=a^{x-y}$ 5.- $a^0=1$.

E9.- Simplificar

a) $\left(16^{7/4}\right)\left(16^{-1/2}\right)$ b) $\dfrac{8^{5/3}}{8^{-1/3}}$ c) $\left(\dfrac{3^{1/2}}{2^{1/3}}\right)^4$

d) $\left(64^{4/3}\right)^{-1/2}$ e) 4^x-4^{x-1}. f) $3^{1/4}9^{-5/8}$

E10.- (Sw20) Simplificar $\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2-\left(e^x+e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$

E11.- (TAREA) Simplificar

1. $\left(4^{3x}\right)^{2x}$ 2. $10^{3x-1}10^{4-x}$ 3. $\dfrac{5^{x-3}}{5^{4+x}}$ 4. $\dfrac{e^x}{5^{1-x}}$

5. $\dfrac{10^{x-3}}{5^{4+x}}$ 6. $\left(\dfrac{4^x}{5^{4+x}}\right)^{3x}$ 7. $\left(\dfrac{2e^x}{5^{4+x}}\right)^{3x}$ 8. $\left(10^{3x-1}2^{4-x}\right)^x$

9. $\sqrt{e^x}+3e^{x/2}$ 10. $e^x-12e^{-x}+\sqrt{e^{2x}}$ 11. $\sqrt{3}^{3x}$

12. $9^{3x/2}$ 13. $16^{-3x/4}\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x/3}$ 14. $9^x\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x/3}$

15. $\dfrac{2^{5x+1}}{2(2^{-x})}$ 16. $\dfrac{9^{-x}}{27^{-x/3}}$

17. $\left(3^x-3^{-x}\right)\left(3^x+3^{-x}\right)$ 18. $\left(3^x-3^{-x}\right)^2+\left(3^x+3^{-x}\right)^2$

19. $e^x\left(e^{-x}+1\right)-e^{-x}\left(e^x+1\right)$ 20. $\left(e^x+e^{-x}\right)^2+\left(e^x-e^{-x}\right)^2$

21. $\dfrac{e^{-x}\left(e^x-e^{-x}\right)+e^{-x}\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^{-2x}}$ 22. $\dfrac{e^x\left(e^x-e^{-x}\right)-e^x\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^{2x}}$

E12.- Encontrar los ceros de la función.

a) (Sw16) $f(x) = -x^2 e^{-x} + 2xe^{-x}$ b) (Sw18) $f(x) = x^2\left(2e^{2x}\right) + 2xe^{2x} + e^{2x}$

E13.- Factorizar

a) $2^{3+h} = 2^3(\qquad)$ b) $2^{x+h} - 2^x = 2^x(\qquad)$

c) $e^{x/2} + e^{-x/2} = e^{-x/2}(\qquad)$ d) $3^{10x} - 1 = \left(3^{5x} - 1\right)(\qquad)$

e) $5^{7x/2} - 5^{x/2} = \sqrt{5^x}(\qquad)$ f) $2^{6x} - 2^x = \left(2^{3x} - 2^{x/2}\right)(\qquad)$

La función exponencial $f(x) = a^x$ para toda $x \in R$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$ es uno a uno (biunívoca, biyectiva) ya que para cualesquiera $x_1 \in R$ y $x_2 \in R$,

i) si $x_1 \neq x_2$ entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$, o bien

ii) ii) si $a^{x_1} = a^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$.

E14.- Utilizando la propiedad de inyectividad de las funciones exponenciales, en cada inciso resolver la ecuación o desigualdad o indicar si no hay solución. (Cuidado en las desigualdades, tomar en cuenta si la función exponencial es creciente o decreciente)

a) $10^{2x-1} = 10^{x+3}$ b) $2^x = 1$ c) $2^x = 0$

d) $5^x = 125$ e) $2^{x+1} = 8$ f) $3\left(2^{x-3}\right) = 12$

g) $8^x = \left(\dfrac{1}{32}\right)^{x-2}$ h) $\left(e^x + 1\right)\left(e^x - 1\right) = 0$ i) $\dfrac{4^{x-1} - 2}{4^x + 1} = 1$

j) $3^{2x} - 12\left(3^x\right) + 27 = 0$ k) $2^{2x} - 4\left(2^x\right) + 4 = 0$ l) $2^{x+1} > 8$

m) $10^{2x-1} \leq 10^{x+3}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1} \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+3}$ n) $\left(e^x + 1\right)\left(e^x - 1\right) < 0$ o) $\dfrac{4^{x-1} - 2}{4^x + 1} \geq 1$

E15.- (TAREA) Resolver

a) $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$ b) $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$ c) $49^x = 7^{2x+3}$

d) $5^3 = (x+2)^3$ e) $9^{x-1} = 3^x$ f) $(x-3)e^x = 0$

g) $2xe^{-x} = 0$ h) $3xe^{-x} + x^2 e^{-x} = 0$ i) $25^{x+1} = 125^{2x}$

j) $10^{x-1} = 1000^{2x}$ k) $9^{x^2} = 3^{3x-1}$ l) $2^x + \sqrt{2^x} + 6 = 0$

m) $3^{5x}3^x - 3 = 0$ n) $(1+x)2^{-x} - 5 \cdot 2^{-x} = 0$ o) $2^x - \dfrac{8}{2^{2x}} = 0$

p) $2^{2x+2} - 17 \cdot 2^x + 4 = 0$ q) $2^{2x} - 2^{x+2} - 32 = 0$ r) $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 3^3 = 0$

s) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + \dfrac{1}{8} = 0$ t) 48. $9^{x-1} < 3^x$ u) $(x-3)e^x > 0$

v) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + \dfrac{1}{8} = 0$ w) $e^{3x} - e^x = 0$ x) $3 \cdot 2^x + \sqrt{2^x} - 4 = 0$

Tarea del Swokowski Sec.5.2 problemas 1 a 10 y 33 a 36 y de Sec. 5.3 del 11 a 13, 19.