CUADERNO DE EJERCICIOS PARA ANÁLISIS MATEMÁTICO II

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

ITAM, 2014

Introducción

El material aquí contenido consiste de 90 ejercicios que corresponden a un segundo curso de Análisis Matemático. La lista de ejercicios se divide en tres partes. La primera se ocupa de la aproximación uniforme de funciones continuas así como de resultados conectadors con el Teorema de Arzela-Ascoli. La segunda parte contiene ejercicios sobre la teoría de las series de Fourier. La tercera parte se refiere al tema de la integral de Riemann-Stieltjes con un énfasis particular en las funciones de variación acotada.

A lo largo del trabajo se han agregado abundantes sugerencias para aquellos ejercicios que me parecen más difíciles. Éstas desde luego pueden no seguirse pues casi siempre hay más de un camino para llegar a la solución y otros métodos son deseables.

Al final se incluye una lista de referencias pertinentes con ejercicios adicionales así como otros temas afines.

Me resulta un gran deber reconocer la impecable y paciente labor de Javier Sagastuy al frente del procesador de LaTeX, LyX.

ITAM, Primavera 2014

Guillermo Grabinsky

Ejercicios

1. Pruebe que las siguientes funciones $|| \, || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas como:

   a) $||(a_1, ..., a_n)|| = \text{máx}_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^j \right| \right\}$

   b) $||(a_1, ..., a_n)|| = \text{máx}_{1 \leq j \leq n} \{ j \, |a_j| \}$

   c) $||(a_1, ..., a_n)|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j^2}$ $(\lambda_1, ..., \lambda_n$ números positivos dados) son normas en $\mathbb{R}^n$.

   d) Determine el producto interior en $\mathbb{R}^n$ que induce la norma del inciso anterior.

2. Para cada $N = 0, 1, ...$ denotamos $\mathcal{P}_N = \{P \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p) \leq N\}$. Sean $x_0 < x_1 < ... < x_N$, $N + 1$ puntos distintos en un intervalo dado $[a, b]$ y sea $|| \, ||_{[a,b]} : \mathcal{P}_N \to \mathbb{R}$ dada por: $||p||_{[a,b]} = \sum_{j=0}^{N} |p(x_j)|$. Pruebe que la función anterior define una norma en $\mathcal{P}_N$.

3. Determine si las siguientes sucesiones de funciones $(f_n : D \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ convergen puntualmente o uniformemente en D. En cada caso halle (si existe) la función límite.

   a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad D = [0, 1]$

   b) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}, \quad D = (-\infty, \infty)$

   c) $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x} \right), \quad D = [0, \infty)$ y en $D = [a, \infty)$ $(a > 0$ dada)

   d) $f_n(x) = x^k e^{-nx^2}, \quad D = [0, \infty)$ y $k \in \mathbb{N}$ dado.

4. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{|x|}{n}}$. Pruebe que $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pero $\left(f_n^2(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ <u>no</u> converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero si en $[-a, a]$ para cada $a > 0$.

5. (Funciones uniformemente continuas sobre dominios no acotados)

a) Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ una función continua. Suponga que para cada $\varepsilon > 0$ existe $M = M(\varepsilon) > 0$ tal que $||f(x)|| < \varepsilon$ si $||x|| > M$. Pruebe que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^p$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica de período $T > 0$ (es decir: $f(x+T) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$). Pruebe: Si f es continua en $[0, T]$, entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

6. *a*) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces existen a y b no negativos tales que: $f(x) \leq a|x| + b$ $(x \in \mathbb{R})$.
(Sugerencia: Sea $\delta = \delta(1) > 0$ y examine $|f(n\delta) - f(0)|$. Tome por ejemplo: $a = \dfrac{1}{\delta}$ y $b = 1 + |f(0)|$)

   b) $f(x) = \sqrt{|x|}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

   c) Si $f \in \mathcal{P}_N$ y $N \geq 2$ entonces f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

7. Defina $D_n(u) = (xe^u + (1-x))^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (i-x)^{n-j} e^{ju}$.

   a) Pruebe: $B_n(f_k)(x) = \dfrac{D_n^{(k)}(0)}{n^k}$ donde $f_k(x) = x^k$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ y las derivadas son con respecto a u.

   b) Use el resultado de a) para obtener explícitamente el polinomio de Bernstein $B_n(x^3)$ y luego verifique que $||x^3 - B_n(x^3)||_{[0,1]} \to 0$ si $n \to \infty$.

   c) Calcule explícitamente $B_n(e^{\lambda x})$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ y verifique sin usar el Teorema de Bernstein que $||e^{\lambda x} - B_n(e^{\lambda x})||_{[0,1]} \to 0$ si $n \to \infty$.
(Sugerencia: $B_n(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda/n}x + (1-x))^n$ por lo que podemos escribir: $B_n(e^{\lambda x}) = \left(1 + \dfrac{a_n}{n}x\right)^n$ con $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = \lambda$).

8. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe:

   a) Si $f(0) = 0 = f(1)$, entonces existe una sucesión de polinomios con coeficientes <u>enteros</u> $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $||f - p_n||_{[0,1]} \to \infty$ si $n \to \infty$.
(Sugerencia: Sea $p_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n}{k} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right] x^k(1-x)^{n-k}$ donde $[c]$ denota la parte entera de c. Basta probar que $||B_n(f) - p_n||_{[0,1]} \to 0$ si $n \to \infty$. Note que $|c - [c]| < 1$ y que $\sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k} \leq \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \dfrac{1}{n}$)

   b) f es uniformemente aproximable con polinomios con coeficientes enteros en $[0, 1]$ $\iff$ $f(0)$ y $f(1)$ son enteros.

9. Pruebe que el inciso b) del ejercicio anterior no se cumple si se considera el intervalo $[-2, 2]$, siguiendo los siguientes pasos:

a) $\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} x^{2n}\sqrt{4-x^2}dx$ es un entero $(n = 0, 1, 2, ...)$.
(Sugerencia: Sea $x = 2\sin(\theta)$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y use que $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta)d\theta = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}$)

b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ no es aproximable uniformemente en $[-2, 2]$ con polinomios en $\mathbb{Z}[x]$.
(Sugerencia: Suponga lo contrario y use el inciso anterior)

10. *a)* Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Pruebe que f puede aproximarse uniformemente en $[1, \infty)$ por medio de funciones de la forma: $F(x) = p\left(\frac{1}{x}\right)$ con p un polinomio.
(Sugerencia: Considere la función $f\left(\frac{1}{x}\right)$ y defínala continuamente en $x = 0$)

    b) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Pruebe que f puede aproximarse uniformemente en $[0, \infty)$ mediante funciones de la forma: $F(x) = p(e^{-x})$ con p un polinomio.

11. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que: $\left|\frac{f(x)}{x^a}\right| \leq 1$ para $x \in (0, 1]$ y para alguna $a > 1$. Pruebe que f puede aproximarse uniformemente en $[0, 1]$ con polinomios de la forma $p(x) = a_2x^2 + ... + a_nx^n$ con $n \geq 2$.

12. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función continua y de período 2π. Pruebe la siguiente versión del Teorema de Riemann-Lebesgue:
$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(n\theta)d\theta = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(n\theta)d\theta$.
(Sugerencia: Use el Teorema de aproximación trigonométrica de Weierstrass.)

13. Sea $\tau_N = \{$Polinomios trigonométricos de grado $\leq N$ con coeficientes reales$\}$. Pruebe:

    a) τ_N es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $2N + 1$.

    b) Si $T_1 \in \tau_N$ y $T_2 \in \tau_M$, entonces $T_1T_2 \in \tau_{N+M}$ y grado(T_1T_2) =grado(T_1)+grado(T_2).

    c) Si $a.b \in \mathbb{R}$, entonces $sin\left(\frac{\theta-a}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-b}{2}\right) \in \tau_1$.

14. (Los polinomios trigonométricos interpoladores de Gauss).
Sean $\theta_0, ..., \theta_{2N}$ $2N + 1$ puntos distintos en $[0, 2\pi)$. Para cada $j \in \{0, ..., 2N\}$ definimos: $g_j(\theta) = \frac{\prod_{k\neq j}\sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)}{\prod_{k\neq j}\sin\left(\frac{\theta_j-\theta_k}{2}\right)}$. Pruebe:

a) Cada g_j es un polinomio trigonométrico de grado igual a N que satisface: $g_j(\theta_l) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq l \\ 1 & si\ j = l \end{cases}$. (Usar el 13 c))

b) Si $w_0, ..., w_{2N}$ son números reales, entonces $g = \sum_{j=0}^{2N} w_j g_j$ es un polinomio en τ_N que satisface $g(\theta_j) = w_j$ para cada $j = 0, ..., 2N$.

c) Si g y $\tilde{g} \in \tau_N$ coinciden en $2N+1$ puntos distintos en $[0, 2\pi)$ entonces g y $\tilde{g}$ son idénticos.
(Sugerencia: Escriba a g y $\tilde{g}$ en forma compleja.)

15. Sea $\mathcal{P}_N$ como en el ejercicio 2. Pruebe:

 a) Si $x_0, ..., x_N$ son $N+1$ puntos distintos en $[a, b]$ y $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{P}_N$ tal que $(p_n(x_j))_{n=1}^{\infty}$ converge para cada $j = 0, ..., N$ entonces existe un polinomio $p \in \mathcal{P}_N$ tal que $||p_n - p||_{[a,b]} \to 0$ si $n \to \infty$.
 (Sugerencia: Sean $l_0, ..., l_N$ los polinomios interpoladores de Lagrange. Sea $c_j = \text{lím}_{n\to\infty} p_n(x_j)$ y defina $p(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j l_j(x)$.)

 b) Si $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada uniformemente en $\mathcal{P}_N$ tal que $\int_a^b (p_n - f)^2 dx \to 0$ si $n \to \infty$ para alguna $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces $f \in \mathcal{P}_N$ y $||f - p_n||_{[a,b]} \to 0$ si $n \to \infty$.
 (Sugerencia: Use el anterior.)

 c) Si $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios tal que $||f - p_n||_{[a,b]} \to 0$ si $n \to \infty$ para alguna $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces grado$(p_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, si f <u>no</u> es un polinomio.

 d) Si $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f sobre un conjunto no acotado D de $\mathbb{R}$, entonces f es un polinomio.

16. Sea $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de polinomios en $\mathcal{P}_N$ tal que converge en $N+1$ puntos distintos de $[a, b]$ y sea p el límite (ver el ejercicio anterior, inciso a).) Sea $a_j(q)$ el coeficiente de x^j de q si $q \in \mathcal{P}_N$. Pruebe: $a_j(p_n) \to a_j(p)$ si $n \to \infty$ para $j = 0, ..., N$.
(Sugerencia: Basta probar que si $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios en $\mathcal{P}_N$ tal que $q_n(x_j) \to 0$ si $n \to \infty$ en $N+1$ puntos distintos $x_0, ..., x_N$ de $[a, b]$, entonces $a_j(q_n) \to 0$ si $n \to \infty$. Las ecuaciones $q_n(x_j) = d_j^n$ $(j = 0, ..., N)$ pueden escribirse vectorialmente como sigue: $V\overline{a} = \overline{d}$ donde $V = V(x_0, ..., x_N)$ es la matriz invertible de Vandermonde, entonces $\overline{a} = V^{-1}\overline{d}$. Concluya que $||\overline{a}|| \to 0$ si $||\overline{d}|| \to 0$.)

17. Enuncie y pruebe los resultados correspondientes a los incisos a), b) y c) del 15. y el 16. para polinomios trigonométricos.

18. (Polinomios de Chebyshev de primera especie, 1^a parte)
Para cada $k = 0, 1, ...$ se define $C_k(x) = \cos(k\theta)$ donde $x = \cos(\theta)$. Pruebe:

 a) $C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$ con $n = 2, 3, ...$ (Fórmula recursiva)

b) C_n es un polinomio de grado n el cual es par (impar) si n es par (impar) y cuyo coeficiente principal es 2^{n-1} .
(Sugerencia: inducción.) Ahora escriba los primeros seis polinomios de Chebyshev.

c) C_n tiene ceros simples en $x_k = \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\pi\right)$ con $k = 1, ..., n$, toma valores extremos en $z_k = \cos\left(\left(\frac{k}{n}\right)\pi\right)$ con $k = 0, 1, ..., n$ en $[-1, 1]$ y $C_n(z_k) = (-1)^k$.
(Sugerencia: $C_n'(x) = \frac{-n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\arccos(x))$ con $x \in (-1, 1)$.)

d) $\int_{-1}^{1} C_k(x)C_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & si\ k \neq m \\ \pi/2 & si\ k = m > 0 \\ \pi & si\ k = m = 0 \end{cases}$.
(Sugerencia: cambio de variable.)

e) $\{C_0, ..., C_n\}$ es base de $\mathcal{P}_N$.

f) $(1 - x^2)C_n''(x) - xC_n'(x) + n^2C_n(x) = 0$ (Ecuación diferencial).

g) $C_mC_n = C_{mn}$ (propiedad de semigrupo $m, n > 0$)

19. (Polinomios de Chebyshev de primera especie, 2^a parte)
Sea $\tilde{C}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x))$ para $n = 1, 2, ...$ Pruebe:

a) $||\tilde{C}_n||_{[-1,1]} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Si $\tilde{p} \in \mathcal{P}_N$ es mónico, entonces $||\tilde{p}||_{[-1,1]} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.
(Sugerencia: Si $||\tilde{p}||_{[-1,1]} < \frac{1}{2^{n-1}}$ entonces $q = \tilde{C}_n - \tilde{p}$ pertenece a $\mathcal{P}_{n-1}$ y la lista $q(z_0), q(z_1), ..., q(z_n)$ alterna signo en n ocasiones, por lo que tiene n raíces, de donde $q = 0$, lo cual lleva a una contradicción.)

c) $\text{mín}\{||x^n - p]]_{[-1,1]} : p \in \mathcal{P}_{n-1}\} = \frac{1}{2^{n-1}}$. La igualdad ocurre $\iff$ $p = x^n - \tilde{C}_n$.

d) $\text{mín}_{a_0,...,a_{n-1}} ||a_0 + a_1x + ... + a_nx^n||_{[a,b]} = \frac{|a_n|(b-a)^n}{2^{2n-1}}$. La igualdad ocurre $\iff$ $p(x) = \frac{a_n(b-a)^n}{2^n}\tilde{C}_n\left(\frac{2x}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}\right)$.
(Sugerencia: Considere $l : [-1, 1] \to [a, b]$, el cambio lineal de variable definido por $l(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)x + \left(\frac{a+b}{2}\right)$.)

e) Sean $\varepsilon > 0$ y $[a, b]$ dados. Pruebe: Existe $\tilde{p} \in \mathcal{P}$ mónico con $||\tilde{p}||_{[a,b]} < \varepsilon \iff b - a < 4$.
(Sugerencia: Use el inciso anterior.)

20. (Un criterio de unicidad para el conjunto alternante)
Suponga que $f^{(n+1)}$ existe y no se anula en $[a,b]$ y que $p_n \in \mathcal{P}_n$ es el mejor aproximador uniforme polinomial de f. Pruebe que $f - p_n$ tiene un único conjunto alternante $x_0 < ... < x_{n+1}$ con $x_0 = a$ y $x_{n+1} = b$.
(Sugerencia: Sea $g = (f - p_n)'$. Si $y_0 < ... < y_m$ es un conjunto alternante, entonces $g'(y_j) = 0$ si $1 \leq j \leq m$, de donde $m \leq n$ por el Teorema de Rolle. Concluya la unicidad.)

21. (Caracterización de C_n)

    a) Si $p \in \mathcal{P}_n$ (no constante) satisface $||p||_{[-1,1]} = 1$ y existen $n+1$ puntos $x_0 < x_1 < ... < x_n$ en los que: $|p(x_j)| = 1$, entonces: $p = \pm C_n$.
    b) Si $t \in \mathcal{T}_n$ (no constante) satisface $||t||_{[0,2\pi]} = 1$ y existen $2n$ puntos distintos $\theta_1 < ... < \theta_{2n}$ en $[0, 2\pi]$ en los que: $|t(\theta_j)| = 1$ entonces: $t(\theta) = \cos(n\theta + \alpha)$ para alguna $\alpha \in \mathbb{R}$.

22. (Polinomios de Chebyshev de segunda especie)
Los polinomios de Chebyshev de segunda especie, denotados U_m ($m = 0, 1, ...$), se definen mediante la fórmula: $U_m(x) = \dfrac{\sin((m+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ donde $x = \cos(\theta)$. Pruebe:

    a) U_m es un polinomio de grado m y el coeficiente principal es 2^m.
    (Sugerencia: Pruebe antes que $U_m = C_m + xU_{m-1}$ ($m \geq 1$) y use inducción.)
    b) $U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$ ($n \geq 2$) (Fórmula recursiva). Halle $U_0, ..., U_6$.
    c) $\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$
    d) U_{m-1} tiene $m-1$ ceros en los puntos $z_k = \cos\left(\left(\dfrac{k}{m}\right)\pi\right)$ $k = 1, ..., m-1$
    (Sugerencia: Pruebe que $U_{m-1} = \dfrac{1}{m} C'_m$)

23. Sea $D = [0,1]$ y $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$. Pruebe directamente que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en D y es acotada, pero $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es uniformemente equicontinua.

24. Sea (M,d) un espacio métrico, $K \subset M$ un subconjunto $d-$compacto y $\mathcal{F} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ una familia $||\quad||_K-$cerrada, acotada y uniformemente equicontinua. Pruebe que los siguientes problemas tienen solución:

    a) $\max\{||f||_K : f \in \mathcal{F}\}$
    b) $\max\{f(x_0) : f \in \mathcal{F}\}$

c) $\max\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(x_j) : f\in\mathcal{F}\right\}$ donde $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ y $x_0,x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$ son dados.
(Sugerencia: $\mathcal{F}$ en $||\ \ ||_K$−compacto en $C_{\mathbb{R}}(K)$)

25. Sean $A>0$ y $a,b\in\mathbb{R}$ dados. Sea $\mathcal{P}_N(A)=\{p\in\mathcal{P}_N : ||p||_{[a,b]}\le A\}$. Pruebe que $\mathcal{P}_N(A)$ es uniformemente equicontinua.
(Sugerencia: Pruebe que $\mathcal{P}_N(A)$ es $||\ \ ||_{[a,b]}$−compacta por sucesiones. El 15. a) es útil.)

26. Sea (M,d) un espacio métrico, $K\subset M$ d−compacto. Sea $\mathcal{F}\subset C_{\mathbb{R}}(K)$ una familia acotada y uniformemente equicontinua. Pruebe que $f^*(x)=\sup\{f(x) : f\in\mathcal{F}\}$ y $f_*(x)=\inf\{f(x) : f\in\mathcal{F}\}$ $(x\in K)$ existen y son funciones uniformemente continuas en K.

27. Sea $\mathcal{F}_a=\{f\in C_{\mathbb{R}}([0,1]) : f(0)=0$ y $|f'(x)|\le x^a$ si $x\in(0,1]\}$ con $a>-1$ fija. Pruebe que $\mathcal{F}_a$ es uniformemente equicontinua.
(Sugerencia: $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$ para $x\in[0,1]$)

28. Determine cuál de las siguientes familias es un álgebra de funciones y cuál distingue los puntos de $[a,b]$.

a) $\mathcal{A}=\left\{\sum_{j=0}^{n}a_jx^{2j} : a_0,...,a_n\in\mathbb{R}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $[a,b]=[0,1]$ ó $[a,b]=[-1,1]$.

b) $\mathcal{A}=\left\{\sum_{j=0}^{n}a_j(h(x))^j : a_0,...,a_n\in\mathbb{R}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ inyectiva.

c) $\mathcal{A}=\{\sum_{k=1}^{n}b_k\sin(k\theta) : b_1,...,b_n\in\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $[a,b]=[-\pi/2,\pi/2]$.

d) $\mathcal{A}=\{p\in\mathbb{Q}[x] : p(a)=p'(a)=0\}$ sobre $\mathbb{Q}$ en $[a,b]$.

29. Una aproximación polinomial concreta de $f(x)=|x|$ en $[-M,M]$. (H. Lebesgue 1908).
Para $s\in[0,1]$ defina inductivamente $p_1(s)=0$ y $p_{n+1}(s)=p_n(s)+\dfrac{1}{2}(s-p_n^2(s))$ si $n\ge 1$. Pruebe:

a) $0\le p_n(s)\le\sqrt{s}$ para todas $s\in[0,1]$ y $n\in\mathbb{N}$.
(Sugerencia: inducción.)

b) $|\sqrt{s}-p_{n+1}(s)|\le\sqrt{s}\left(1-\dfrac{\sqrt{s}}{2}\right)$.
(Sugerencia: inducción.)

c) $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $\varphi(s)=\sqrt{s}$ en $[0,1]$.

d) Si $q_n(t)=Mp_n\left(\dfrac{t^2}{M^2}\right)$ $(M>0$ fija), entonces q_n es un polinomio para cada n y $||f-q_n||_{[-M,M]}\to 0$ si $n\to\infty$.

30. Sea (M, d) un espacio métrico, $K \subset M$ $d-$compacto y $A \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ un álgebra de funciones. Suponga que $\mathcal{A}$ no se anula en K; esto es: para cada $x \in K$, existe una función $f_x \in \mathcal{A}$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Pruebe: $\mathcal{A}$ distingue los puntos de $K \iff$

    a) $\mathcal{A}$ no se anula en K y

    b) $\mathcal{A}$ separa los puntos de K.

    (Sugerencia: $\Leftarrow$) Por hipótesis dados $x \neq y$ existen $g_1, g_2 \in \mathcal{A}$ tales que: $g_1(x)$ y $g_2(y)$ son distintos de cero. Sea $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Para $a \neq b$ en $\mathbb{R}$ considere: $H(z) = a\dfrac{h_1(z)}{h_1(x)} + b\dfrac{h_2(z)}{h_2(y)}$ donde $h_1(z) = g_1(z)f(z) - g_1(z)f(y)$ y $h_2(z) = g_2(z)f(z) - g_2(z)f(x)$)

31. Notación como en el anterior. Pruebe: Si $\mathcal{A}$ separa los puntos de K, entonces: $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$ ó existe $x_0 \in K$ tal que $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$ ($\overline{\mathcal{A}}$ denota la $|| \quad ||_K-$cerradura de $\mathcal{A}$ en $C_{\mathbb{R}}(K)$).
    (Sugerencia: Use el anterior. Si $\mathcal{A}$ se anula en K, sea $\mathcal{A}' = \{g + c : g \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{R}\}$. Pruebe que $\mathcal{A}'$ es un álgebra y que $\overline{\mathcal{A}'} = C_{\mathbb{R}}(K)$. Sea $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{\mathcal{A}} \subset \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$. Para la otra contención, considere $g' = g + c \in \mathcal{A}'$ tal que $||f - g'||_K < \varepsilon/2$ y pruebe que $||f - g||_K < \varepsilon$)

32. Sean $\mathcal{F} = \{f \in C_{\mathbb{R}}([a, b]) : f$ es diferenciable por tramos en $[a, b]\}$ y $\tilde{\mathcal{F}} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f$ es escalonada$\}$. Pruebe que $\mathcal{F}$ y $\tilde{\mathcal{F}}$ son celosías que distinguen los puntos de $[a, b]$.

33. Pruebe que si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f puede aproximarse uniformemente en K con polinomios con coeficientes reales en n variables, es decir en $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$.

34. Pruebe el Teorema Trigonométrico de Weierstrass aplicando el Teorema de Stone-Weierstrass a la circunferencia unitara $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y notando que hay una correspondencia biyectiva entre las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ y las funciones continuas $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ que satisfacen $f(\pi) = f(-\pi)$.

35. Pruebe que toda función continua $H : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ puede ser aproximada uniformemente en $[a, b] \times [c, d]$ por medio de funciones de la forma: $\sum_{j=1}^{n} f_j(x)g_j(y)$, $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ con f y g pertenecientes a álgebras de funciones continuas con dominios en $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente, que separen puntos y contengan constantes.

36. Pruebe: Si g es continua, periódica y no constante, entonces g tiene un período positivo mínimo T_0. T_0 se llama el período básico.
    (Sugerencia: Pruebe que $\{T > 0 : g(x + T) = g(x)\}$ no es vacío y tiene mínimo positivo.) Muestre con algún ejemplo que el resultado es falso si g no es continua.

37. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, periódica y no constante. Sea T_0 el período básico de g. Pruebe:

   a) Si g' existe, entonces g' es de período T_0.

   b) Si $G(x) = \int_c^x g(t)dt$, con $c \in \mathbb{R}$ fija, entonces G es de período $T_0 \iff \int_0^{T_0} g(t)dt = 0$.

38. Sea $PC([0, 2\pi]) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | g$ es continua y de período $2\pi\}$. Para cada $n = 0, 1, ...$ fijo, defina $S_n : PC([0, 2\pi]) \to \tau_n$ como sigue: $S_n(g) =$ enésima suma parcial de la serie de Fourier clásica de g. Pruebe:

   a) S_n es una transformación lineal.

   b) $S_n(g') = (S_n(g))'$, si g' existe y es continua (G.G. Stokes 1849).

   c) $S_n \circ S_m = S_n = S_m \circ S_n$ si $n \le m$.
   Además, obtenga $S_n(g_\alpha)$ en términos de $S_n(g)$ si $g_\alpha(\theta) = g(\theta + \alpha)$ con $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ dado.
   (Sugerencia: Use la forma compleja de $S_n(g)$)

39. Establezca las siguientes desigualdades:

   a) $\dfrac{\theta}{\sin(\theta)} \le \dfrac{1}{\cos(\theta)}$ si $0 < |\theta| < \dfrac{\pi}{2}$.

   b) $|\sin(\theta)| \ge \dfrac{2}{\pi}|\theta|$ si $|\theta| \le \dfrac{\pi}{2}$ (Desigualdad de C. Jordan).
   (Sugerencia: $(\sin)''(\theta) < 0$ en $(0, \pi/2)$ por lo que $\sin(\theta)$ es cóncava hacia abajo.)

   c) $|\sin(n\theta)| \le |n||\sin(\theta)|$ $(\theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z})$.
   (Sugerencia: Inducción.) Muestre con algún ejemplo que c) puede fallar si n no es un entero.

40. Sea $g \in PC([0, 2\pi])$. Suponga que $g', g'', ..., g^{(p)}$ existen y son continuas. Pruebe:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1}(|a_n(g)| + |b_n(g)|) < \infty$.
   (Sugerencia: Use la desigualdad de Bessel con $g^{(p)}$, relacione $a_n(g^{(p)})$ y $b_n(g^{(p)})$ con $a_n(g)$ y $b_n(g)$ y luego use la desigualdad de Cauchy.)

   b) Existe una constante $M > 0$ tal que $|a_n(g)|$ y $|b_n(g)|$ son menores que $\dfrac{M}{n^{p-1}}$.

41. (La desigualdad de Wirtinger)
   Sea $g \in PC([0, 2\pi])$ tal que $a_0(g) = 0$ y $g' \in PC([0, 2\pi])$. Pruebe:

   a) $\int_{-\pi}^{\pi} (g(t))^2 dt \le \int_{-\pi}^{\pi} (g'(t))^2 dt$ (Sugerencia: use la identidad de Parseval).

b) La igualdad ocurre en el inciso a) $\iff$ $g(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ para algunas constantes a y b.

42. Pruebe: $\sup_{0<a<b} \left| \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \pi$

43. Determine los ceros de D_N y K_N (Núcleo de Dirichlet y Fèjer respectivamente) en $[-\pi, \pi]$ $(N = 1, 2, ...)$

44. Pruebe:

    a) $\sum_{k=0}^{N-1} \sin((2k+1)\theta) = \frac{\sin^2(N\theta)}{\sin(\theta)}$ $(\theta \neq \pi j,\ j \in \mathbb{Z})$
    (Sugerencia: $2\sin(2k+1)\sin(\theta) = \cos(2k\theta) - \cos(2(k+1)\theta)$, sume sobre k y use que $1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2(\alpha)$.

    b) $\sum_{k=1}^{N} \sin(k\theta) = \frac{\cos(\theta/2) - \cos((N/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)}$ $(\theta \neq 2\pi j,\ j \in \mathbb{Z})$
    Sea $\tilde{D}(\theta) = \sum_{k=1}^{N} \sin(k\theta)$, $\left(\tilde{D}_n\right)_{N=0}^{\infty}$ se conoce como el núcleo conjugado de Dirichlet.)

    c) Sume las series $S(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)$ y $\tilde{S}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)$ por el método de promedios de Cèsaro.

45. Para $g \in PC([0, 2\pi])$ y $n = 1, 2, ...$ denote por $\sigma_n(g)$ el enésimo promedio de Fèjer. Pruebe:

    a) $m \leq g \leq M \iff m \leq \sigma_n(g) \leq M$, para toda n.
    (Sugerencia: Use el Teorema de Fèjer.)

    b) Si $h \in PC([0, 2\pi])$ es tal que $S_n(h)$ converge puntualmente a g en $[0, 2\pi]$ entonces h y g son iguales.

    c) $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \sigma_n(g))^2 d\theta = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$.
    Concluya que $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2) \to 0$ si $n \to \infty$.
    (Sugerencia: $\sigma_n(g) - S_n(g) \perp g - S_n(g)$ y use el Teorema de Fèjer.)

46. (El lema de Abel) (1826)

    a) Sean $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(U_k)_{k=1}^{\infty}$ sucesiones numéricas, entonces para cada $n > m$ se tiene: $\sum_{k=m}^{n} a_k U_k = \sum_{k=m}^{n} S_k(a_k - a_{k+1}) + (a_{n+1}S_n - a_m S_{m-1})$ donde $S_k = \sum_{j=1}^{k} U_j$.

    b) Si $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de números no negativos y $|S_k| \leq M$ $(k = 1, ..., n)$ entonces: $|\sum_{k=m}^{n} a_k U_k| \leq 2Ma_m$.

47. (Una serie trigonométrica convergente que no es de Fourier)

a) Pruebe que $S_\alpha(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(k\theta)}{k^\alpha}$ converge para todo θ, pero no es la serie de Fourier de alguna función en $PC([0, 2\pi])$ $(0 < \alpha \leq 1/2)$ (Sugerencia: Si θ no es múltiplo entero de 2π, entonces $|\sum_{k=m}^{n} \sin(k\theta)| \leq \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. Use el lema de Abel con $a_k = \dfrac{1}{k^\alpha}$. Para la segunda parte use la desigualdad de Bessel.)

b) Pruebe que $\left|\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{k}\right| \leq \pi + 2$ $(n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R})$

(Sugerencia: Basta considerar $\theta \in (0, \pi)$. Sea $\left[\dfrac{\pi}{\theta}\right]$ la parte entera de $\dfrac{\pi}{\theta}$, sea $m = \text{mín}\left\{n, \left[\dfrac{\pi}{\theta}\right]\right\}$ y escriba: $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{\sin(k\theta)}{k} + \sum_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{k} = S_1 + S_2$ (Si $m = n$ entonces $S_2 = 0$). $|S_1| \leq \pi$ por el 38 c), para S_2 use que $m + 1 > \dfrac{\pi}{\theta}$.)

48. Pruebe que la serie trigonométrica $S(\theta) = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\sin(k\theta)}{\log(k)}$ converge para toda θ, pero no es la serie de Fourier de alguna función en $PC([0, 2\pi])$. (Sugerencia: Si fuera la serie de Fourier de alguna función en $PC([0, 2\pi])$ podría integrarse término a término y la nueva serie debería converger.)

49. Obtenga la serie de Fourier de $(\cos(\theta))^n$ y de $(\sin(\theta))^n$ con $n = 1, 2, ...$ (Sugerencia: Considere la forma compleja de la serie de Fourier.)

50. *a*) Suponga que $\alpha > 0$ y no es un entero. Pruebe que $\cos(\alpha\theta) = \dfrac{2\alpha \sin(\alpha\theta)}{\pi} \left\{\dfrac{1}{2\alpha^2} - \dfrac{\cos(\theta)}{\alpha^2 - 1} + \dfrac{\cos(2\theta)}{\alpha^2 - 2^2} - \dfrac{\cos(3\theta)}{\alpha^2 - 3^2} + ...\right\}$ con $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Si $\theta \notin \mathbb{Z}$ entonces: $\cot(\pi\theta) = \dfrac{1}{\pi\theta} + \dfrac{2\theta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\theta^2 - n^2}$ y $\csc(\pi\theta) = \dfrac{1}{\pi\theta} + \dfrac{2\theta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\theta^2 - n^2}$.

c) Derive término a término la primera serie en b) para obtener: $\dfrac{\pi^2}{(\sin^2(\pi\theta))} = \text{lím}_{m\to\infty} \sum_{-m}^{m} \dfrac{1}{(\theta - n)^2}$ $(\theta \notin \mathbb{Z})$.

d) Integre término a término la primera serie en b) para obtener: $\dfrac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta} = \text{lím}_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \dfrac{\theta^2}{k^2}\right)$ $(\theta \notin \mathbb{Z})$.

(NOTA: en c) y d) justifique la posibilidad de diferenciar e integrar término a término.)

51. (El núcleo de De la Vallée-Poussín)
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $V_n = 2K_{2N+1} - K_N$, donde K_N denota el núcleo de Fèjer. Pruebe:

a) V_N es un polinomio trigonométrico de grado $2N+1$.

b) V_N es una función par y $a_0(V_N) = a_1(V_N) = ... = a_{N+1}(V_N) = 1$ mientras que $b_1(V_N) = ... = b_{N+1}(V_N) = 0$.

c) $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V_N(\theta)d\theta = 1$ y $\lim_{N\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} V_N(\theta)d\theta = 0$ para cada $\delta \in (0,\pi)$.

(NOTA: Si $g_N(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-\theta)V_N(t)dt$, entonces $g_N(\theta)$ es un polinomio trigonométrico con los mismos coeficientes de Fourier que g entre 0 y $N+1$.)

52. Notación como en el anterior.
Pruebe:

a) Si $g \in PC([0,2\pi])$ y $g_N(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-\theta)V_n(t)dt$, entonces: $a_k(g_N) = a_k(g)$ con $k = 0,...,N+1$ y $b_k(g_N) = b_k(g)$ con $k = 1,...,N+1$.

b) $||g_N - g||_{\mathbb{R}} \to 0$ si $N \to \infty$.

53. Sea $(V,<,>)$ un espacio pre-Hilbert real. Pruebe: $< x,y >= 0 \iff ||\alpha x + y|| \geq ||y||$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

54. *a*) Sea $(V,<,>)$ un espacio pre-Hilbert y $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ un conjunto ortonormal. Pruebe: $\text{mín}\left\{\sum_{j=1}^{n}||z-x_j||^2 : z \in \{x_1,x_2,...,x_n\}\right\} = n-1$. Determine la única solución.
(Sugerencia: Escriba $z = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$, desarrolle y complete cuadrados.)

b) Sea $(p_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{P}_N$ una sucesión tal que $||f-p_n||_2^2 = \int_a^b (f-p_n)^2 dx \to 0$ si $n \to \infty$ para alguna $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que $f \in \mathcal{P}_N$ y que $||f-p_n||_{[a,b]} \to 0$ si $n \to \infty$. ($\therefore \mathcal{F} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es u.e.c.)
(Sugerencia: Sea $\{q_0,...,q_N\}$ una base arbitraria para $\mathcal{P}_N$ y sea q^* el mejor aproximador de f en $\mathcal{P}_N$. Entonces $0 \leq ||f-q^*||_2 \leq ||f-p_n||_2 \quad \forall n$. $\therefore\ f = q^* \in \mathcal{P}_N$. Si $f - p = \sum_{j=0}^{N} a_{jn}q_j$ entonces: $||f-p_n||_2^2 = \sum_{j=0}^{N} a_{jn}^2$ por lo que $\lim_{n\to\infty} a_{jn} = 0$ si $n \to \infty \quad \forall j \in \{0,...,N\}$. Concluya.)
(Compare con el ejecricio 13.)

55. (Mínimos cuadrados)
Sea $V = \mathbb{R}^n$ con el producto interior usual. Pruebe: $||y - Ax||^2$ se minimiza con $x = w \iff A^tAw = A^ty$.
(Sugerencia: $y - Aw$ debe ser perpendicular a Ax .)

56. Pruebe: Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números tal que $|a_1| \geq |a_2| \geq ...$ y $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, entonces:

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$ converge absolutamente en algún θ_0, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta)$ converge absolutamente en algún θ_0 que no sea múltiplo entero de π, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.
(Sugerencia: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cos^2(n\theta_0) \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |\cos(n\theta_0)| < \infty$ y $\cos^2(n\theta_0) = \dfrac{1+\cos(2n\theta_0)}{2}$ para el a). El inciso b) es similar.)

57. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números tal que $|a_n| \to \infty$ si $n \to \infty$ y $(\zeta_n)_{n=1}^{\infty}$ otra sucesión. Entonces: $\int_a^b \cos^2(a_n\theta + \zeta_n) d\theta \to \dfrac{b-a}{2}$ si $n \to \infty$.

58. (Una versión más del lema de Riemann-Lebesgue)
Sean $g, h \in PC([0, 2\pi])$ dadas. Pruebe el siguiente resultado: $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} g(t)h(nt)dt = \left(\int_0^{2\pi} g(t)dt\right)\left(\int_0^{2\pi} h(t)dt\right)$.
(Sugerencia: Empiece con $h = 1$, luego con h un polinomio trigonométrico y finalmente trate el caso general.)

59. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0 = f(b)$. Suponga que f' existe, es continua en $[a, b]$ y que $\int_a^b f^2(x)dx = 1$. Pruebe:

a) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{4} \le \left(\int_a^b (f'(x))^2 dx\right)\left(\int_a^b x^2 f^2(x)dx\right)$
(Sugerencia: Integre por partes y use la desigualdad de Schwarz.)

60. Pruebe:

a) Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable en $[0, 1]$, entonces: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f\left(\dfrac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$. Sin embargo, la existencia del límite no garantiza que f sea Riemann-integrable. (Proporcione ejemplos.)

b) Si f es Riemann-integrable en $[a, b]$ y h es continua en $[\min(f), \max(f)]$, entonces $h \circ f$ es Riemann integrable en $[a, b]$.
(Sugerencia: Ver el Teorema 6.11 de [16])

61. Evalúe:

a) $\int_0^1 f(x)d[nx]$ $n = 1, 2, ...$ si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua ($[c]$ denota la parte entera de c). Ahora obtenga: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \int_0^1 f(x)d[nx]$.

b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^b e^{-nx} de^{-x}$.

62. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión dada. Para $x > 0$ defina $A(x) = \sum_{n=1}^{[x]} a_n$ ($[x]$ = parte entera de x y en donde sumas vacías son cero.) Sea $f : (0, b] \to \mathbb{R}$ una función tal que f' es Riemann-integrable. Pruebe:

a) $\sum_{n\leq b} a_n f(n) = -\int_1^b A(x)f'(x)dx + f(b)A(b)$.
(Sugerencia: Use el teorema de integración por partes y el de modificación de la integral.)

b) $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^\alpha} = \alpha \int_1^n \dfrac{[x]}{x^{\alpha+1}}dx + \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ si $\alpha > 1$.

63. Denote por: $BV([a,b]) = \{g : [a,b] \to \mathbb{R} | g$ es de variación acotada en $[a,b]\}$. Para $g \in BV([a,b])$ fija, sea:
$I_a^b(g) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f$ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a $g\}$. Pruebe que $I_a^b(g)$ es un álgebra y una celosía de funciones que contiene a $C([a,b])$.

64. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Pruebe que si f^2 es Riemann integrable en $[a,b]$, entonces f no tiene por qué serlo (propocione ejemplos). ¿Puede afirmarse lo mismo si en lugar de f^2 se considera f^3?
(Sugerencia: Ejercicio 60. b))

65. (El Teorema de O. Bonnet)

   a) Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa y creciente. Si $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que: $\int_a^b \varphi(x)h(x)dx = \varphi(c)\int_a^b h(x)dx$.

   b) Enuncie y pruebe el resultado correspondiente si φ es decreciente.

66. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe: $\text{lím}_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^\infty x^n f(x^n) = \int_0^1 f(x)dx$.
(Sugerencia: Sea $x \in (0,1)$ fija. Considere los subintervalos $[x,1]$, $[x^2,x]$, $[x^3,x^2]$,... los cuales determinan una partición infinita $\mathcal{P}$ de $[a,b]$. Note que la longitud de $[x^{n+1},x^n]$ es $x^n(1-x)$ la cual tiende a cero uniformemente (en n) si $x \to 1^-$.)

67. Sea $f \in PC([0,2\pi])$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\alpha}{\pi}$ es irracional. Pruebe:
$\text{lím}_{N\to\infty} \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^\infty f(\theta + n\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ para cada θ.
(Sugerencia: Empiece con $f \in \tau_m$.)

68. Sean $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ funciones de variación acotada. Suponga que existe $\rho > 0$ tal que $|g(x)| \geq \rho$ para toda $x \in [a,b]$ (i.e. $\text{ínf}\{|g(x)| : x \in [a,b]\} > 0$) Pruebe que f/g es de variación acotada en $[a,b]$ y que $v_a^b(f/g) \leq \dfrac{1}{\rho^2}\left(||f||_{[a,b]}v_a^b(g) + ||g||_{[a,b]}v_a^b(f)\right)$.

69. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Defina $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ poniendo: $V(x) = v_a^x(g)$ y $V(a) = 0$.
Pruebe que:

   a) V es de variación acotada y

b) $v_a^x(V) = v_a^x(g)$ para toda $x \in (a,b]$.

70. Defina $g_\alpha : \left[o, \dfrac{2}{\pi}\right] \to [-1,1]$ como sigue: $g_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x \in (0, 2/\pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y $\alpha > 0$.
Pruebe:

   a) g_α es continua para toda $\alpha > 0$ y diferenciable en $\left[0, \dfrac{2}{\pi}\right]$ si $\alpha > 1$.

   b) $g_\alpha \in BV\left(\left[0, \dfrac{2}{\pi}\right]\right) \iff \alpha > 1$.

   (Sugerencia: Examine las series $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ con $0 < \alpha \leq 1$ y $\alpha > 1$.)

71. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que g' existe y es Riemann-integrable en $[a,b]$. Pruebe que:

   a) $g \in BV([a,b])$ y que $v_a^b(g) = \int_a^b |g'(x)|dx$.

   b) Definimos la longitud de la gráfica G_g de g mediante la fórmula: $\ell(G_g) = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}dx$.
   Pruebe: $g \in BV([a,b]) \iff \ell(G_g) < +\infty$ (C. Jordan, 1881)

72. Sean $g \in BV([a,b])$ y $c \in (a,b)$. Suponga que $g(c^+) = g(c)$.
Pruebe:

   a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ y una partición $\mathcal{Q} = (c = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ de $[c,b]$ suficientemente fina con $x_1 - c < \delta$ tal que:
   $v_c^b(g) - \dfrac{1}{2}\varepsilon \leq \dfrac{1}{2}\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \dfrac{1}{2}\varepsilon + v_{x_1}^b(g)$. Ahora deduzca: $v_c^b(g) - v_{x_1}^b(g) < \varepsilon$ y concluya que: $v_c^b(g) = v_{c^+}^b(g)$.

   b) g es continua en $c \in [a,b] \iff V(g)$ es continua en c .

73. Pruebe:

   a) Sea $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $BV([a,b])$. Suponga que existe $M > 0$ tal que $v_a^b(g_n) \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $g_n(x) \to g(x)$ si $n \to \infty$ para toda $x \in [a,b]$, entonces $g \in BV([a,b])$ y $v_a^b(g) \leq M$.

   b) Muestre con un ejemplo que a) puede fallar (i.e. $g \notin BV([a,b])$) si no se supone que existe $M > 0$ tal que $v_a^b(g_n) \leq M$, aún si $g_n \to g$ uniformemente en $[a,b]$.

74. Defina $|| \quad ||_{BV} : BV([a,b]) \to \mathbb{R}$ poniendo: $||g||_{BV} = |g(a)| + v_a^b(g)$.

   a) Pruebe que $|| \quad ||_{BV}$ es una norma en $[a,b]$ y es tal que si $||g_n - g||_{BV} \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $||g_n - g||_{[a,b]} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

b) Pruebe que la norma $|| \quad ||_{BV}$ es completa.

75. Sea $\{r_1, r_2, ...\}$ una enumeración de los racionales en $(0,1)$. Defina g y $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ como sigue: $g(x) = \sum_{\{n: r_n < x\}} \dfrac{1}{2^n}$ y $h(x) = \sum_{\{n: r_n \leq x\}} \dfrac{1}{2^n}$. Pruebe:

    a) $0 \leq g(x) \leq h(x) \leq 1$ para toda $x \in [0,1]$ (se entiende que $g(0) = 0 = h(0)$).

    b) g y h son funciones <u>estríctamente</u> crecientes.

    c) g y h tienen un salto de tamaño $\dfrac{1}{2^n}$ en cada r_n , de hecho: $h(r_n) - h(r_n^-) = \dfrac{1}{2^n} = g(r_n^+) - g(r_n)$. ¡Por lo tanto g y h son <u>discontinuas</u> en los racionales!

    d) g es continua por la izquierda y h es continua por la derecha para toda $x \in [0,1]$.

    e) g y h son continuas en cada irracional.

    (Sugerencia: La densidad de los racionales es la clave en a) y b). En c), d) y e) hay que notar que: $\text{mín}\{n : x < r_n < y\} \to \infty$ si $x \to y^-$ o $y \to x^+$.)

76. Sea $g : [0,1] \to [0,1]$ definida en el anterior y sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua arbitraria. Pruebe que: $\int_0^1 f dg = \sum \dfrac{f(r_n)}{2^n}$.
(Sugerencia: Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(\zeta) - f(\eta)| < \varepsilon$ si $|\zeta - \eta| < \delta$ ($\zeta, \eta \in [0,1]$). Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[0,1]$ tal que $||\mathcal{P}|| < \delta$. Pruebe que para toda suma de Riemann-Stieltjes se tiene que: $\left| S(\mathcal{P}; f, g) - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f(r_n)}{2^n} \right| < \varepsilon$.)
(NOTA: Si h es como en el anterior, entonces $\int_0^1 f dg = \int_0^1 f dh$ para toda $f \in C([0,1])$ y sin embargo $g \neq h$.)

77. Pruebe:

    a) Si f es continua, no negativa, g es estríctamente creciente y satisface: $\int_a^b f dg = 0$, entonces $f = 0$.
    (NOTA: g no es necesariamente continua.)

    b) Si f es continua y $\int_a^b fg dx = 0$ para toda g continua con $g(x) = 0 = g(b)$, entonces $f = 0$.

78. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones dadas con g monótona creciente. Sea $c \in (a,b)$ tal que f y g son discontinuas en c por la derecha (o por la izquierda). Pruebe que f <u>no</u> es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a g.

79. Sea $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continua y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ estríctamente creciente. Defina $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ poniendo: $F(x) = \int_a^x f dg$ para $x \in [a,b]$. Pruebe que: $\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{g(x+h)-g(x)} = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.
(Sugerencia: $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{g(x+h)-g(x)} - f(x) = \int_x^{x+h} \left[\dfrac{f(t)-f(x)}{g(x+h)-g(x)}\right] dg$. Use el hecho de que f es uniformemente continua.)

80. (La función de K. Thomae)
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como sigue: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \dfrac{m}{n} \text{ con } (m,n) = 1 \end{cases}$
. Pruebe que:
   a) f es Riemann-integrable en $[0,1]$.
   b) $\int_0^1 f dx = 0$
   (NOTA: Se puede probar que f es continua en $x \iff x \notin (0,1) \setminus \mathbb{Q}$.)
   c) Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por: $h(x) = 1$ si $x \in (0,1]$ y $h(0) = 0$. Pruebe que $g = h \circ f$ no es Riemann-integrable a pesar de que h y f sí lo son.

81. Sea $g \in BV([a,b])$ tal que:
   a) $g(a) = 0$
   b) g es continua por la derecha en $[a,b]$.
   c) $\int_a^b f dg = 0$ para toda $f \in C([a,b])$
   Pruebe que $g = 0$
   (Sugerencia: Primero tome $f = 1$ para obtener $g(b) = 0$. Si $c \in (a,b)$, considere $h > 0$ tal que $c+h < b$ y sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c] \\ 1 - \dfrac{1}{h}(x-c) & \text{si } x \in [c,c+h] \\ 0 & \text{si } x \in [c+h,b] \end{cases}$
   . De ahí obtenga que: $-g(c) = \int_a^b f dg$, por lo que $|g(c)| \le v_c^{c+h}(g)$. Ahora use la hipótesis en b) haciendo tender a h a cero y use el 72. a))

82. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Pruebe que:
   a) f^m es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a f^n para todo $m,n \in \mathbb{N}$ y halle $\int_a^b f^m df^n$.
   b) $f \in I_a^b(\sin f)$ y $\int_a^b f d\sin f = f \sin f|_a^b + \cos f|_a^b$.

83. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente. Pruebe:$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f|^n dg\right)^{1/n} = ||f||_{[a,b]}$

84. (Cambio Lineal de Variable en la Integral de Riemann-Stieltjes)
Sea $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ la (única) función lineal tal que $\varphi(a) = c$ y $\varphi(b) = d$. Sean $f \in C([c,d])$ y $g \in BV([c,d])$ dadas. Pruebe:

   a) $g \circ \varphi \in BV([a,b])$ y $v_a^b(g \circ \varphi) = v_c^d(g)$.

   b) $f \circ \varphi \in I_a^b(g \circ \varphi)$ y $\int_a^b (f \circ \varphi) d(g \circ \varphi) = \int_c^d f dg$.

85. Hipótesis y notación como en el anterior. Suponga además que g' es Riemann integrable. Pruebe usando el inciso b) del anterior que: $\int_c^d fg'dx = \int_a^b (fg') \circ (\varphi)\varphi' dx$.
(Sugerencia: $(g \circ \varphi)' = g'(\varphi) \circ \varphi'$ es Riemann-integrable. Use la versión adecuada del teorema de modificación de la integral.)

86. Defina $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$. Pruebe:

   a) $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ para toda $x \in [0,1]$.

   b) $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx$ es diferente de $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$. Explique el fenómeno.

87. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua fija y $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como sigue: $g_n(0) = 0$, $g_n(x) = \dfrac{1}{n}$ si $x \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right]$, $g_n(x) = \dfrac{2}{n}$ si $x \in \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right]$, ... , $g_n(x) = 1$ si $x \in \left(\dfrac{n-1}{n}, 1\right]$. Pruebe:

   a) $g_n(x) \to x$ uniformemente en $[0,1]$ $(n \to \infty)$ y $v_0^1(g_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

   b) $\int_0^1 f dg_n \to \int_0^1 f dx$ si $n \to \infty$.

   c) Ahora sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$. Obtenga el mismo resultado si $f_n(x) = nx(1-x)^n$ o si $f_n(x) = e^{-nx}$.

88. Decimos que $g : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ es de variación acotada en $(-\infty, \infty)$, y denotaremos $g \in BV(-\infty, \infty)$, si $g \in BV([a,b])$ para todo $a < b \in \mathbb{R}$ y $\sup_{a<b} v_a^b(g) < \infty$. Si este es el caso, $v_{-\infty}^{\infty}(g)$ denota dicho supremo. Pruebe:

   a) $v_{-\infty}^{\infty}(g) = \lim_{a\to\infty} v_{-a}^{a}(g)$.

   b) $\lim_{x\to-\infty} v_{-\infty}^{\infty}(g) = 0 = \lim_{x\to\infty} v_x^{\infty}(g)$ donde $v_x^{\infty}(g) = \lim_{b\to\infty} v_x^b(g)$.

c) g es acotada, de hecho para cada a: $|g(x)| \leq |g(a)| + v_{-\infty}^{\infty}(g)$ para toda x .

d) g puede escribirse como sigue: $g = m_1 - m_2$ con m_i creciente y $\lim_{x\to-\infty} m_i(x) = 0$ $(i = 1, 2)$.
(Sugerencia: Sea $m_1(x) = v_{-\infty}^{x}(g)$.)

e) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ existen.

89. Sea $g \in BV(-\infty, \infty)$ y $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ acotada. Suponga que $f \in I_a^b(g)$ para toda $a < b$. Decimos que $f \in I_{-\infty}^{\infty}(g)$ si $\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b fdg$ existe, en cuyo caso lo denotamos por $\int_{-\infty}^{\infty} fdg$. Muestre que la conclusión del segundo teorema de Helly en este contexto puede fallar como sigue: Sea $\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y sea $g_n(x) = \alpha(x - n)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que:

a) $g_n \in BV(-\infty, \infty)$, de hecho $v_{-\infty}^{\infty}(g_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

b) $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ $\forall x$.

c) $\int 1d(\lim_{n\to\infty} g_n) \neq \lim_{n\to\infty} \int 1dg_n$.

90. Este ejercicio repara parcialmente la falla del segundo teorema de Helly como sigue:
Denotamos por: $C_0(\mathbb{R}) = \{f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R} | f \text{ es continua y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,;\, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$. Supongamos que (g_n) es una sucesión en $BV(-\infty, \infty)$ tal que $\exists\, M > 0$ con $v_{-\infty}^{\infty}(g_n) \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ existe para toda x.
Pruebe:

a) $g \in BV(-\infty, \infty)$ y $v_{-\infty}^{\infty}(g) \leq M$,

b) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} fdg_n = \int_{-\infty}^{\infty} fdg$ $\forall\, f \in C_0(\mathbb{R})$ fija .
(Sugerencia: Para b) primero hay que probar que $f \in I_{-\infty}^{\infty}(g_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $f \in I_{-\infty}^{\infty}(g)$. Para esto, muestre que la hipótesis $f \in C_0(\mathbb{R})$ implica que para todo $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que: $\left|\int_{-\infty}^{-A} fdg_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ y $\left|\int_{A}^{\infty} fdg_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ uniformemente en n y también para g. Finalmente, escriba:
$\left|\int_{-\infty}^{\infty} fdg_n - \int_{-\infty}^{\infty} fdg\right| \leq \left|\int_{-A}^{A} fdg_n - \int_{-A}^{A} fdg\right| + \left|\int_{-\infty}^{-A} fdg_n\right| + \left|\int_{-\infty}^{-A} fdg\right|$
$+ \left|\int_{A}^{\infty} fdg_n\right| + \left|\int_{A}^{\infty} fdg\right| < \left|\int_{-A}^{A} fdg_n - \int_{-A}^{A} fdg\right| + \varepsilon$.
Ahora use el Teorema de Helly en $[-A, A]$.)

Bibliografía

[1] Achieser, N. I., *Theory of Approximation*, Dover (1992)

[2] Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Reverté (1979)

[3] Bartle, R. G., *Introducción al Análisis Matemático*, Limusa (1980)

[4] Cheney, E.W., *Introduction to Approximation Theory*, Chelsea (1982)

[5] Davis, P. J., *Interpolation and Approximation*, Dover (1975)

[6] Haaser, N. B. y Sullivan, J. A., *Real Analysis*, Van Nostrand (1971)

[7] Lorentz, G.G., *Approximation of Functions*, Segunda Edición, Chelsea (1987)

[8] Lorentz, G. G., *Bernstein Polynomials*, Chelsea (1986)

[9] Marsden, J. E. y Hoffmann, M. J., *Análisis Clásico Elemental*, Segunda Edición, Addison-Wesley (1998)

[10] Nachbin, L., *Elements of Approximation Theory*, Van Nostrand Mathematical Studies #14 (1967)

[11] Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Volumen 1, Cuarta Edición, Ungar (1974)

[12] Natanson, I. P., *Constructive Function Theory*, Volumen 1, Ungar (1964)

[13] Rivlin, T. J., *An Introduction to the Approximation of Functions*, Dover (1981)

[14] Rivlin, T. J., *Chebyshev Polynomials*, Segunda Edición, Wiley (1990)

[15] Royden, H. L., *Real Analysis*, Tercera Edición, Macmillan (1989)

[16] Rudin, W., *Elementos del Análisis Matemático*, Tercera Edición, McGraw-Hill (1980)

[17] Timan, A. F., *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Dover (1993)

[18] Tolstov, G., *Fourier Series*, Dover (1976)