INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

Tema 1

1.1 BREVE INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA MATEMÁTICA

Bibliografía:

Smith, Karl J.- Introducción a la Lógica simbólica.- Grupo Editorial Iberoamérica.- México, 1991.

Espinosa Armenta, Ramón.- Matemáticas discretas.- Alfaomega.- México, 2010.

Epp, Susanna S..- Discrete Mathematics with applications.- CENGAGE Learning.- 4ª edición. Canada, 2011.

Resolver los ejercicios L1 a L3, las respuestas se irán revisando después de analizar la teoría que corresponde y que aparece en esta sección.

L1.- Escribir una oración que corresponda a la negación de la que aparece en cada inciso, no usar “no es cierto que”:

a) Juan es matemático.
b) La máquina no está desconectada.
c) Juan es matemático y su hermana ingeniero en computación.
d) Carlos nada los martes y María juega tenis los sábados.
e) El contacto no sirve o la máquina está desconectada.
f) El programa tiene un error de lógica en las primeras diez líneas o corrió con un conjunto incompleto de datos.
g) Todo trabajo es noble.
h) Algunos triángulos rectángulos son isósceles.
i) Ningún cisne europeo es negro.
j) Algunos filósofos son hombres de acción.

L2.- Determinar dos oraciones equivalentes para cada una de las siguientes expresiones:

a) Si me pagan iré el sábado.

b) Si el líquido x está hirviendo entonces su temperatura es al menos de 250°.

c) Si n es divisible entre 6 entonces n es divisible entre 2 y n es divisible entre 3.

d) Si $-2 < x < 2$ entonces $x^2 < 4$.

L3.- Negar las proposiciones del problema L2.

L4.- Leer con cuidado la definición de proposición que aparece a continuación.

Una *proposición* es una oración que es falsa (F) o verdadera (V), pero no las dos cosas a la vez.

L5.- Determinar si son proposiciones las que aparecen en los siguientes incisos:

a) 3+5

b) $8 < 2$

c) $x^2 - 2x + 1$

d) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

e) Trae ese libro.

f) ¿Vendrás el jueves?

g) Si está lloviendo entonces las calles están mojadas.

L6.- Leer con cuidado las definiciones que aparecen a continuación y completar tablas de verdad correspondientes.

Las *proposiciones simples* se denotan en general con las letras *P*, *Q*, *R*, etc.

Las *proposiciones compuestas* se forman combinando proposiciones simples con *conectivos lógicos* (conjunción, disyunción y negación) y/o *operadores lógicos* (condicional y bicondicional).

La *conjunción* de dos proposiciones *P* y *Q*, se denota "$P \wedge Q$" y se lee "*P* y *Q*", será una proposición verdadera sólo si ambas proposiciones son verdaderas.

La *disyunción* de dos proposiciones P y Q, se denota "$P \vee Q$" y se lee "P o Q", será una proposición falsa sólo si ambas proposiciones son falsas.
La *negación* de una proposición P, se denota "$\neg P$" y se lee "no P", será una proposición falsa si P es verdadera y verdadera si P es falsa.

L7.- Determinar para las proposiciones del problema L1 a) a L1 f) de qué tipo de proposición se trata, simple, conjunción o disyunción.

Una *tabla de verdad* es un esquema que muestra cómo los valores de verdad de proposiciones compuestas dependen de los conectivos usados y de los valores de verdad de las proposiciones simples que las componen.

Proposición P	Negación $\neg P$
V	
F	

P	Q	Conjunción (y) $P \wedge Q$	Disyunción (o) $P \vee Q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

L8.- Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones.
a) $-5 < -3$ y $-5 < -6$ b) $-5 < -3$ o $-5 < -6$

L9.- Leer con cuidado las definiciones que aparecen a continuación y completar tablas de verdad correspondientes.

La proposición *condicional "Si* P, entonces Q" se denota "$P \to Q$", y es falsa sólo si P es verdadera y Q es falsa.

La proposición *bicondicional "*P si y sólo si Q" se denota "$P \leftrightarrow Q$" y es verdadera sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

P	Q	Condicional $P \to Q$	Bicondicional $P \leftrightarrow Q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Una *tautología* es una proposición que siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de cada una de las proposiciones.

Una *contradicción* es una proposición que siempre es falsa, independientemente de los valores de verdad de cada una de las proposiciones.

"$P \equiv Q$" indica que las proposiciones P y Q son *lógicamente equivalentes*, esto es, tienen los mismos valores de verdad para los mismos valores de las proposiciones simples que las componen.

Sean p, q y r proposiciones, **algunas propiedades** de los conectivos y los operadores lógicos son:

1.- De la doble negación $\neg(\neg p) \equiv p$

2.- Leyes de De Morgan: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

3.- Conmutatividad: $p \wedge q \equiv q \wedge p$; $\qquad p \vee q \equiv q \vee p$

4.- Asociatividad: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$; $\qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

5.- Identidades: $p \wedge V \equiv p$ $\qquad p \vee F \equiv p$

6.- De la negación: $p \wedge \neg p \equiv F$ $\qquad p \vee \neg p \equiv V$

9.- Distributividad $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; $\qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

L10.- Utilizando las propiedades 1 y 2 negar las siguientes proposiciones y comparar la repuesta con la escrita en L1.

a) Juan es matemático.
b) La máquina no está desconectada.
c) Juan es matemático y su hermana ingeniero en computación.
d) Carlos nada los martes y María juega tenis los sábados.
e) El contacto no sirve o la máquina está desconectada.
f) El programa tiene un error de lógica en las primeras diez líneas o corrió con un conjunto incompleto de datos.

Dos *proposiciones lógicamente equivalentes a una proposición condicional* de la forma $P \to Q$ son $\neg P \vee Q$ y $\neg Q \to \neg P$. $(P \to Q) \equiv (\neg P \vee Q) \equiv (\neg Q \to \neg P)$. Esto puede demostrarse con la ayuda de tablas de verdad.

L11.- Determinar dos proposiciones equivalentes para cada una de las siguientes expresiones y compararlas con las repuestas del problema L2.

a) Si me pagan iré el sábado.
b) Si el líquido x está hirviendo entonces su temperatura es al menos de 250°.
c) Si n es divisible entre 6 entonces n es divisible entre 2 y n es divisible entre 3.
d) Si $-2 < x < 2$ entonces $x^2 < 4$.

La *negación de la proposición condicional* $P \to Q$ es $P \wedge \neg Q$. $\neg(P \to Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$.

L12.- Negar las proposiciones del problema L11 y compararlas con las respuestas de L3. En caso de duda hacer las tablas de verdad.

L13.- Analizar si la representación de las proposiciones es correcta y determinar, después de completar la tabla de verdad, qué proposición o proposiciones son equivalentes a la proposición condicional A, y cuál o cuáles corresponden a su negación.

Sea P: Me pagan y Q: Iré el sábado.

A. Si me pagan iré el sábado. $P \to Q$
B. Si no me pagan no iré el sábado. $\neg P \to \neg Q$
C. Si no voy el sábado entonces no me pagan. $\neg Q \to \neg P$
D. Si voy el sábado entonces me pagan. $Q \to P$
E. No me pagan o voy el sábado. $\neg P \vee Q$
F. Me pagan y no voy el sábado. $P \wedge \neg Q$

				A	B	C	D	E	F
P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg P \to \neg Q$	$\neg Q \to \neg P$	$Q \to P$	$\neg P \vee Q$	$P \wedge \neg Q$
V	V								
V	F								
F	V								
F	F								

Cálculo de predicados y cuantificadores

Un *predicado* es una oración que contiene un número finito de variables y se vuelve una proposición cuando se sustituye en la variable un valor específico. El dominio de un predicado variable es el conjunto de valores que pueden ser sustituidos en el lugar de la variable.

Cuantificadores universal y existencial.

"Cualquier cuantificador de la forma *para todo*, *todo*, *para cada*, *o cada* se llama **cuantificador universal** …" (Simth 50) y se simboliza por medio de una $\forall$.
Ejemplo: $2x+3x=5x$ es verdadera para todo valor de x; en forma simbólica: $\forall x$, $2x+3x=5x$.

"Cualquier cuantificador de la forma *existe*, *alguno*, *o existe por lo menos uno* se llama **cuantificador existencial** …" (Simth 50) y se simboliza por medio de una $\exists$.
Ejemplo: $2x+3=5$ es verdadera si $x=1$, para cualquier otro valor de x será falsa, en forma simbólica: $\exists x$ tal que $2x+3=5$.

Una proposición que contiene un cuantificador universal es verdadera sí y sólo si el dominio de la variable es igual al conjunto universal correspondiente al problema. Ejemplo: si $x \in R$ la proposición $\forall x$, $x=5$, es falsa. Una proposición con un cuantificador existencial es verdadera sí y sólo si el dominio de la variable no es vacío.

L14.- Encontrar el valor de verdad de cada predicado abajo:

a) $\forall x \in R - \{0\}, x > \frac{1}{x}$

b) $\exists x \in R, x > \frac{1}{x}$

L15.- Sea R el dominio de los predicados $x > 1$, $x > 2$, $|x| > 2$ y $x^2 > 4$. Determinar cuáles de los siguientes predicados son verdaderos y cuáles falsos.

a) $x > 2 \Rightarrow x > 1$

b) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$

c) $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$

d) $x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2$

Negación de los cuantificadores. (Smith Pág. 8)

Proposición	Negación
Todos	Algunos .. no
Ningún	Algunos
Algunos	Ningún
Algunos .. no	Todos

L16.- Escribir la negación de las siguientes proposiciones y comparar con la respuesta dada en L1.

a) Todo trabajo es noble.
b) Algunos triángulos rectángulos son isósceles.
c) Ningún cisne europeo es negro.
d) Algunos filósofos son hombres de acción.

L17.- Escribir la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\forall$ número primo *p*, *p* es impar.
b) $\exists$ un triángulo T tal que la suma de sus ángulos es 200°.
c) $\forall x \in R$, Si $x > 0$ entonces $x^2 > 9$.

Algunos tipos de demostración (si el tiempo lo permite)

L18.- Demostrar lo que se solicita en cada inciso.

a) Si *m* es impar y *n* impar entonces *mn* es impar.
b) Si n^2 es par entonces *n* es par.
   Sugerencia: demostrar la proposición equivalente
   Si *n* no es par entonces n^2 no es par.
c) $\exists x \in R, x > \frac{1}{x}$

L19.- Encontrar los contraejemplos para demostrar que son **falsos**:

a) $\forall x \in R, x > \frac{1}{x}$
b) $\forall x \in Z, \frac{x-1}{x} \notin Z$
c) Si *m* es par y *n* impar entonces *mn* es impar.
d) $\forall x \in R, \forall y \in R\ \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

En el anexo A (a,b) de este documento se encuentra un resumen de lógica.

1.2 BREVE INTRODUCCIÓN A CONJUNTOS

C1.- ¿Qué es un conjunto?

C2.- Mencionar algunas formas de representar conjuntos.

C3.- ¿Es relevante el orden al enumerar los elementos de un conjunto?

C4.- ¿Es relevante el número de veces que aparecen los elementos al describir un conjunto?

C5.- ¿Cómo se llama el conjunto que no tiene elementos? ¿Cómo se representa?

C6.- Indicar en cada inciso si lo que se indica corresponde o no a la notación de un conjunto:
a) 7 b) A c) $\{a,b\}$ d) $\varnothing$ e) a

C7.- ¿Es $4 = \{4\}$? Justificar su respuesta.

C8.- En cada inciso expresar el conjunto enumerando los elementos.
a) Los nombres de las estaciones del año.
b) Las letras de la palabra "naturaleza".

C9.- Expresar cada uno de los conjuntos que aparecen abajo utilizando una característica que describa sus elementos.
a) $\{a, o, i, e, u\}$ b) $\{2, 4, 6, 8, ...\}$

C10.- ¿Cuándo se dice que dos conjuntos son iguales? ¿Qué notación se usa para indicar dicha relación entre conjuntos?

C11.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?
a) $A = \{a,b,c,d\}$ b) $B = \{d,e,a,c\}$ c) $C = \{d,b,a,a,c\}$

C12.- ¿Cómo se define un subconjunto? ¿Qué notación se usa para indicar dicha relación entre conjuntos? ¿Qué diferencia hay entre los símbolos $\subseteq$ y $\in$?

C13.- Sean $A = \{c, d, f, g\}$, $B = \{f, j\}$ y $C = \{d, g\}$, determinar si son ciertas, justificando su respuesta:

a) $B \subseteq A$	b) $C \subseteq A$	c) $C \subseteq C$	d) $C \subset A$
e) $\varnothing \subseteq A$	f) $C \subseteq \varnothing$	g) $3 \in \{1,2,3\}$	h) $1 \subseteq \{1\}$
i) $\{2\} \in \{1,2,3\}$	j) $1 \in \{1\}$	k) $\{3\} \in \{1,\{2\},\{3\}\}$	l) $\{1\} \subseteq \{1\}$
m) $\{1\} \subseteq \{1,\{2\}\}$	n) $1 \in \{\{1\},2\}$	o) $\{2\} \subseteq \{1,\{2\},\{3\}\}$	p) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
q) $\varnothing \in \{1,\{2\},\{3\}\}$	r) $\varnothing \subseteq \{1,2\}$	s) 0 está en $\varnothing$	t) $\varnothing = \{\varnothing\}$

C14.- ¿Cómo se definen las operaciones de unión, intersección, complemento y diferencia entre conjuntos?

C15.- Sea $A = \{b, c, d, f, g\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ determinar:

a) $A \cup B$	b) $A \cap B$	c) $A - B$	d) $B - A$
e) $A \cup \varnothing$	f) $A \cap U$	g) A^c	h) $(A \cup B)^c$
i) $A \cap \varnothing$	j) $A \cup U$	k) $\varnothing^c$	l) U^c

C16.- Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{1,3\}$Listar los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A \times A$

C17.- a) Decir que un elemento está en $A \cap (B \cup C)$ significa que el elemento está en ______ y en ______.

b) Decir que un elemento está en $A - (B \cup C)$ significa que el elemento está en ______ y no está en ______.

C18.- Sea A={1,2,3} determinar el conjunto potencia $P(A)$.

C19.- A continuación se presenta una demostración, completar los espacios.

Sean A, B, y C conjuntos, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Demostración:

Sean A, B, y C conjuntos, suponer que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, para demostrar que $A \subseteq C$ debemos demostrar que todo elemento en _______ está en _______. Dado cualquier elemento en A, ese elemento está en _______ (porque $A \subseteq B$) por lo que ese elemento también está en _______ (ya que _______) . Entonces $A \subseteq C$.

C20.- A continuación se presentan las propiedades de la unión, intersección, complemento y diferencia entre conjuntos, analizarlas con cuidado.

PROPIEDADES

Para todos los conjuntos *A, B* y *C* subconjuntos del conjunto universal *U.* $\varnothing$ representa el conjunto vacío.

PROPIEDAD	INTERSECCIÓN	UNIÓN
1.- Inclusión:	$A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$	$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$
2.- Conmutatividad:	$A \cap B = B \cap A$;	$A \cup B = B \cup A$
3.- Asociatividad:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4.- Identidades:	$A \cap U = A$	$A \cup \varnothing = A$
5.- Cotas:	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup U = U$
6.- Idempotencia:	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
7.- Leyes de Morgan:	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
8.- De complementos:	$A \cap A^C = \varnothing$	$A \cup A^C = U$

9.-Distributividad $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

10.- Complementos de U y $\varnothing$: $U^C = \varnothing$ $\qquad \varnothing^C = U$

11.- Doble complemento: $(A^c)^c = A$

12.- Transitividad: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$

13.- Leyes de absorción: $A \cup (A \cap B) = A$ $\qquad A \cap (A \cup B) = A$

14.- Representación alternativa del conjunto diferencia: $A - B = A \cap B^C$

En el anexo A (c) de este documento se encuentran transcritas estas propiedades.

C20.- Justificar los pasos de la siguiente demostración utilizando las propiedades.
Para todo *A*, *B*, y *C* conjuntos $(A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$
Demostración: Supongamos *A*, *B*, y *C* son conjuntos cualesquiera. Entonces

$(A \cup B) - (C - A) = (A \cup B) \cap (C - A)^c$ por ____________________(a)

$= (A \cup B) \cap (C \cap A^c)^c$ por ____________________(b)

$= (A \cup B) \cap (A^c \cap C)^c$ por ____________________(c)

$= (A \cup B) \cap ((A^c)^c \cup C^c)$ por ____________________(d)

$= (A \cup B) \cap (A \cup C^c)$ por ____________________(e)

$= A \cup (B \cap C^c)$ por ____________________(f)

$= A \cup (B - C)$ por ____________________(g)