INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA SUPERIOR

OPERACIONES CON FUNCIONES

Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Terminología	Valor de la función	Dominio
Suma $f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
Diferencia $f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
Producto fg	$(fg)(x)=f(x)g(x)$	$D_{fg}=D_f\cap D_g$
Cociente $\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{f/g}=\{x \mid x\in D_f\cap D_g, g(x)\neq 0\}$

OBSERVACIÓN: SIEMPRE $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
PERO NO SIEMPRE $f(a+b)=f(a)+f(b)$
POR EJEMPLO:
Sea $f(x)=\sqrt{x}$ entonces si $ab\neq 0$, $f(a+b)\neq f(a)+f(b)$

OF1.- Con la información que aparece en las tablas determinar el dominio y la función resultante de la operación que se indica en cada inciso.

x	0	2	4	6	7	10
$f(x)$	2	15	3	8	2	1

x	0	2	3	6	7
$g(x)$	1	3	5	2	0

a) $f+g$ b) fg c) $\frac{f}{g}$

OF2.- Si las funciones *f* y *g* están definidas por $f:\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ y $g:\{(1,3),(3,5),(4,8)\}$ determinar el dominio y la función resultante de la operación que se indica en cada inciso.

a) $f+g$ b) fg c) $\frac{f}{g}$

OF3.- Si $f(x)=\sqrt{x-3}$, $g(x)=\frac{1}{|x-8|}$ calcular: a) $f(4)-g(4)$ b) $(fg)(-2)$

OF4.- $f(x)=\frac{1}{x+1}$ $g(x)=5$ calcular: a) $f(-1)-g(-1)$ b) $(fg)(-2)$

OF5.- Si $f(x) = x + x^2$ y $g(x) = \begin{cases} 4x & si\ x < -2 \\ x - 5 & si\ x \geq -2 \end{cases}$ encontrar los siguientes valores:

a) $f(-5) - g(-3)$ b) $(fg)(-2)$ c) $(f+g)(4)$

OF6.- Calcular en cada caso a) $f(x) + g(x)$, b) $f(x) - g(x)$, c) indicar dominio y rango.

i) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -5x + 4$

ii) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $g(x) = 2x^2 - 3$

iii) $f(x) = -3x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

iv) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = 5$

v) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = -4$

vi) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \frac{1}{|x-8|}$

vi) $f(x) = |x+8|$, $g(x) = \sqrt{17 - x}$

OF7.- Calcular en cada caso a) $f(x)g(x)$, b) $\frac{f(x)}{g(x)}$,

c) indicar el dominio de $f(x)$, $g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $f(x)g(x)$.

i) $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 3x - 1$

ii) $f(x) = -3x^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

iii) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ $g(x) = \sqrt{8x^2 + 4}$

iv) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = 2x + 2$

v) $f(x) = -5x^3 - 5$, $g(x) = 5x + 5$

vi) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \frac{1}{|x-8|}$

OF8.- Calcular 18.- $f(x) = \begin{cases} x & si & x < 1 \\ 2x & si & 1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-2} & si & x \geq 3 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x & si & x \leq 2 \\ \frac{1}{x-3} & si & 2 < x < 3 \\ 6 & si & x \geq 3 \end{cases}$

a) $(f+g)(-1)$ b) $(f+g)(2)$, c) $(f+g)(2.5)$ d) $(f+g)(5)$

OF9.- Determinar el dominio y la regla correspondiente a:

a) $(f+g)(x)$, b) $(fg)(x)$

c) $(f/g)(x)$ para cada una de las parejas de funciones siguientes.

i) $f(x) = 3x - 7$ $g(x) = \begin{cases} x & si & x \leq -2 \\ 2x & si & |x| < 2 \\ \sqrt{x-2} & si & x \geq 2 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<1 \\ 2x & si \quad 1\le x<3 \\ \sqrt{x-2} & si \quad x\ge 3 \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} x & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad 2<x<3 \\ 6 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & si \quad x\ne -2 \\ -4 & si \quad x=-2 \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\le 1 \\ |x| & si \quad x>1 \end{cases}$

iv) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x\le -2 \\ x+3 & si \quad |x|<2 \\ 5 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$ $\qquad g(x)=3x^2-7$

v) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ 2x^3 & si \quad 1\le x<6 \\ 4 & si \quad x\ge 6 \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} x & si \quad x\le 2 \\ \\ 6 & si \quad x>4 \end{cases}$

vi) $f(x)=\begin{cases} |x| & si \quad x\ne -2 \\ -4 & si \quad x=-2 \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\le 1 \\ |x| & si \quad x>1 \end{cases}$

OF10.- Determinar cuál o cuáles de las siguientes funciones es igual a $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x}$.

a) $F(x)=\dfrac{2x^3+x^2}{x^2}$ $\qquad$ b) $G(x)=\dfrac{(x^3+2x)(1+2x)}{(x^2+2)x}$

c) $g(x)=2x+1$ $\qquad$ d) $h(x)=\sqrt{1+4x+4x^2}$

OF11.- Graficar $f(x)=x|x-1|+1$.

OF12.- Si $f(x)=x^2+2x$ determinar en cada inciso la función g que satisfaga:

a) $(f+g)(x)=x^3+x+1$ $\qquad$ b) $(f-g)(x)=x^3+x+1$

c) $(fg)(x)=x^3+3x^2+2x$ $\qquad$ d) $(f/g)(x)=1$

TAREA: Swokowski Sec. 3.7 problemas 1 a 8.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Definición: La **composición de** las **funciones** f y g se denota por $f \circ g$ está definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, su *dominio* es $D_{f \circ g} = \{x \in \Re \mid x \in D_g \ y \ g(x) \in D_f\}$.

OF13.- Utilizando las funciones definidas en la tabla que aparece abajo calcular:

a) $(f \circ g)(1)$ b) $(g \circ f)(1)$ c) $(f \circ f)(1)$ d) $(g \circ g)(2)$

x	0	2	4	6	7	10
$f(x)$	2	15	3	8	2	1

x	0	2	3	6	7
$g(x)$	1	3	5	2	0

OF14.- Con la información que aparece en las tablas determinar el dominio y la función resultante de la operación que se indica en cada inciso.

x	0	2	4	6	7	10
$f(x)$	2	15	3	8	2	1

x	0	2	3	6	7
$g(x)$	1	3	5	2	0

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

OF15.- Calcular para cada pareja de funciones:

a) $(f \circ g)(1)$ b) $(g \circ f)(1)$ c) $(f \circ f)(1)$ d) $(g \circ g)(2)$

i) $f(x) = 4x^3 - 1$, $g(x) = |x|$

ii) $f(x) = -x^2 - 4$, $g(x) = 5x - 1$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{10x^2 - 1}$

iv) $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = x^2 - 3$

v) $f(x) = |x+2|$, $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 8$

vi) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+5}$

vii) $f : \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
$g : \{(1,3),(3,5),(4,8)\}$

viii) $f : \{(3,5),(4,3),(5,7),(6,2)\}$
$g : \{(3,4),(5,3),(7,5),(6,2)\}$

OF16.- Calcular para cada una de las parejas de funciones del ejercicio anterior

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) indicar el dominio de $f(g(x))$ y $g(f(x))$

TAREA: Swokowski Sec. 3.7 problemas 9 a 40.

OF17.- (S18) Si $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = 2 - x^2$ determinar $(f \circ f)(-1)$ y $(g \circ g)(2)$

OF18.- Si el dominio de la función f es [0,1] ¿Cuál es el dominio de $2f(3x-1)$?

OF19.- Si el dominio de la función f es [0,1] ¿Cuál es el dominio de $2f(3x-1) - f(x+4)$?

OF20.- (S48) Expresar la función $H(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ en la forma $f\circ g$.

OF21.- (S40) Determinar $f\circ g\circ h$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x^3$, $h(x)=x^2-4$.

OF22.- (S52) Expresar la función $G(x)=\dfrac{2}{\left(3+\sqrt{x}\right)^2}$ en la forma $f\circ g\circ h$.

Ejercicios adicionales de composición de funciones

OF23.- En cada inciso determinar a) $f\big(g(x)\big)$ b) $g\big(f(x)\big)$

c) indicar el dominio de $f(x)$, $g(x)$, $f\big(g(x)\big)$ y $g\big(f(x)\big)$

i) $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$ ii) (S34) $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$

iii) $f(x)=3x+1$, $g(x)=\sqrt{x+5}$ iv) $f(x)=\sqrt{9-(x-1)^2}$, $g(x)=\sqrt{25-x^2}$

TAREA: Swokowski Sec. 3.7 problemas 53 a 60 y ejercicios de repaso 20 a 40, 42 a 71.

OF24.- En cada inciso determinar: a) $f\big(g(x)\big)$ b) $g\big(f(x)\big)$

i) $f(x)=2x-3$ $\quad g(x)=\begin{cases}-x & si \quad x\le 2\\ 6 & si \quad x>4\end{cases}$

ii) $f(x)=x^2-3$ $\quad g(x)=\begin{cases}|x| & si \quad x\ne -2\\ 2x & si \quad x=-2\end{cases}$

iii) $f(x)=\sqrt{x-3}$ $\quad g(x)=\begin{cases}2x & si \quad x<-1\\ -x^2 & si \quad -1\le x\le 5\\ x/2 & si \quad x>5\end{cases}$

INVERSAS FUNCIONES UNO A UNO Y SUS INVERSAS

Una función con domino A y rango B es una función **uno a uno** (**inyectiva o biunívoca)** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es, si cualquiera de las dos condiciones equivalentes siguientes se satisface:

- Siempre que $x_1\ne x_2$ en A, entonces $f(x_1)\ne f(x_2)$ en B.
- Siempre que $f(x_1)=f(x_2)$ en B, entonces $x_1=x_2$ en A.

OF24.- En cada inciso indicar si la función es inyectiva y si no lo es restringir el dominio. Justificar.

a) $f(x) = x^3 - 1$

b) $f(x) = x - 5$

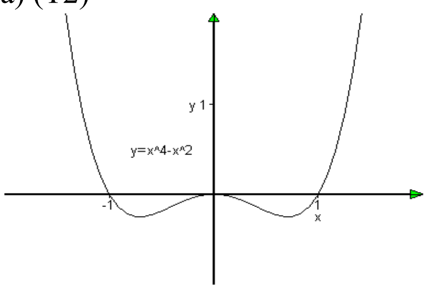
c) $f(x) = (x+5)^2 - 1$

d) $f(x) = |x+3| - 1$

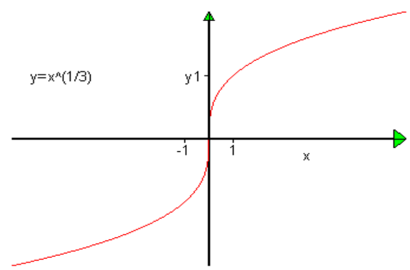
Criterio de la recta horizontal Una función es **uno a uno** si y sólo si ninguna recta horizontal interseca su gráfica más de una vez.

OF25.- En cada inciso indicar si la función es inyectiva y si no lo es restringir el dominio. Justificar.

a) (T2)



b) (T6)



Una función creciente en todo su dominio es inyectiva.

Una función decreciente en todo su dominio es inyectiva.

Def. (St.p197) Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su función **inversa** $f^{-1}(x)$ tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \quad \forall\, y \in B.$$

Teorema de las funciones inversas. Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B, f^{-1} es la función **inversa** de f si satisface las siguientes condiciones.

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para cualquier } x \text{ en } A$$
$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \text{ para cualquier } x \text{ en } B$$

Observaciones: i) $f^{-1}(x)$ **no quiere decir** $\dfrac{1}{f(x)}$

ii) $D_{f^{-1}} = \mathrm{Im}_f$; $\mathrm{Im}_{f^{-1}} = D_f$.

Una función tiene inversa si y sólo si es inyectiva.

OF26.- Verificar si las funciones que aparecen a continuación son inversas.

a) (St18) $f(x)=\dfrac{3-x}{4}$, $g(x)=3-4x$

b) (St22) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $0\le x\le 2$; $g(x)=\sqrt{4-x^2}$, $0\le x\le 2$.

Para obtener la función inversa de una función uno a uno (St.p199)

1.- Escribir $y=f(x)$.

2.- Resolver la ecuación para x en términos de y si es posible.

3.- Intercambiar x y y. La ecuación resultante es $y=f^{-1}(x)$.

4.- Verificar que: $f^{-1}(f(x))=x \quad \forall x\in D_f$ y $f\left(f^{-1}(x)\right)=x \quad \forall x$ en el dominio de f^{-1}.

OF27.- Encontrar la inversa de las siguientes funciones (si la función no es inyectiva restringir el dominio). Indicar el dominio y la imagen de la función y de su inversa.

a) (T21) $f(x)=x^3+1$

b) (T14) $f(x)=x^2$ con $x\le 0$

c) (T16) $f(x)=x^2-2x+1$ con $1\le x$

d) (T12) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

e) (St28) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$

f) (St38) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $0\le x\le 2$

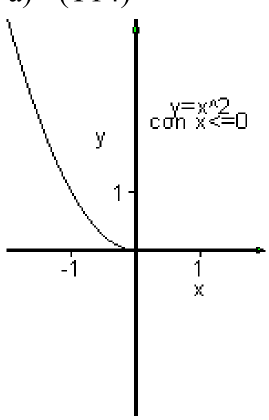
g) (St34) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

h) $f(x)=|x-2|$

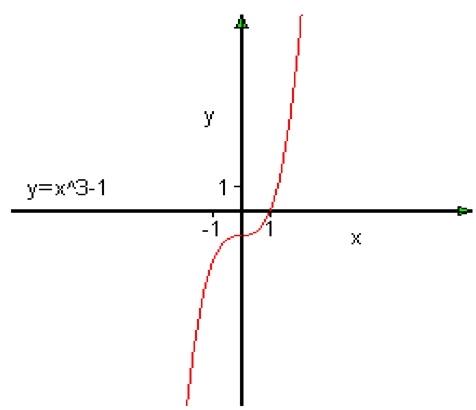
La **gráfica de** f^{-1} se obtiene reflejando la de f respecto a $y=x$. (St.p200)

OF28.- Encontrar la inversa de las siguientes funciones (si la función no es inyectiva restringir el dominio). Indicar el dominio y la imagen de la función y de su inversa.

a) (T14)



b) (T15)



TAREA: Swokowski Sec. 5.1 problemas 1 a 55 y 57.

OF29.- Sea $f(x)=2x-4$ encontrar g en cada inciso:

a) $f(g(x))=\dfrac{10-4x}{x-2}$, b) $g(f(x))=\dfrac{10-4x}{x-2}$. Sugerencia: utilizar f^{-1}.

OF30.- Sea $x \geq 0$ el dominio de $f(x) = x^2 + 1$ encontrar g en cada inciso:

a) $f(g(x)) = 9x^4 + 1$, b) $g(f(x)) = 9x^4 + 1$. Sugerencia: utilizar f^{-1}.

Ejercicios adicionales de inversas

OF31.- Con la información que aparece en las tablas determinar f^{-1} y g^{-1}, y calcular lo que se indica en cada inciso además de sus dominios.

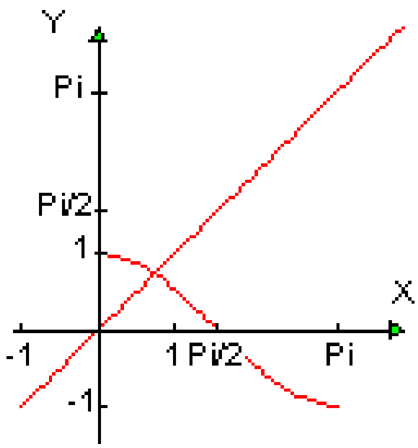
x	0	2	4	6	7	10
$f(x)$	2	15	3	8	2	1

x	0	2	3	6	7
$g(x)$	1	3	5	2	0

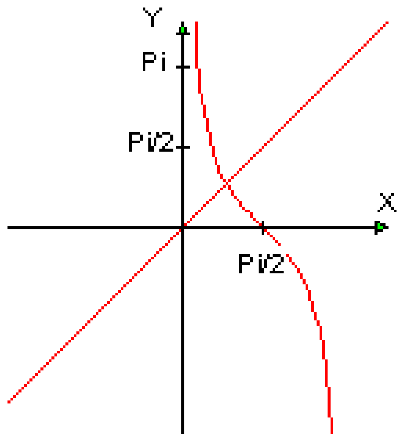
a) $f \circ f^{-1}$ b) $g^{-1} \circ f^{-1}$ c) $f^{-1} \circ f$ d) $g \circ g$

OF32.- En cada inciso se presenta la recta $y = x$ y una función con dominio restringido dibujar la función inversa correspondiente:

a) $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$



b) $g : (0, \pi) \to (-\infty, \infty)$



c) $h : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$