INTRODUCCIÓN A LAS MATEMATICAS SUPERIORES

TEMA 4

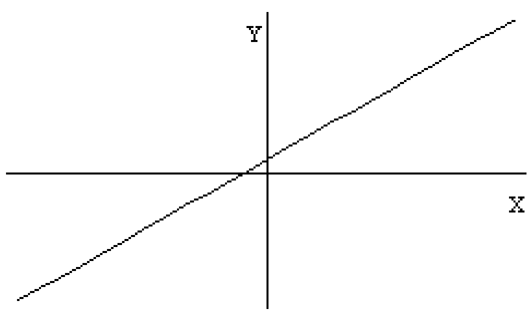
FUNCIONES

Def.(Thomas, Pág. 18): Una **función** de un conjunto *D* a un conjunto *I* es una regla que asigna un único elemento $f(x)$ de *I*, a cada elemento *x* de *D*.

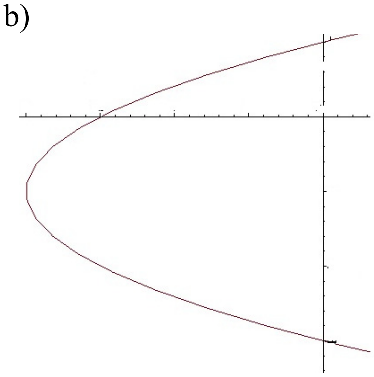
Def.(Thomas, Pág. 20): La **gráfica** de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Consiste de todos los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas (x,y) satisfacen la ecuación.

F1.- Indicar si la relación especificada por las siguientes gráficas es una función:

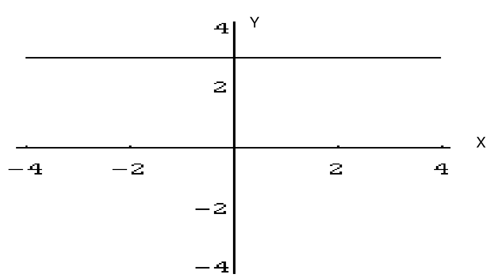
a)



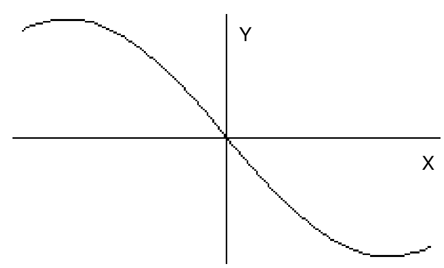
b)



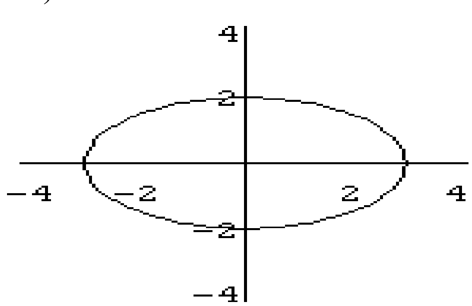
c)



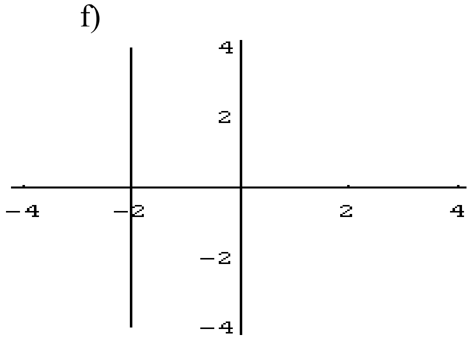
d)



e)

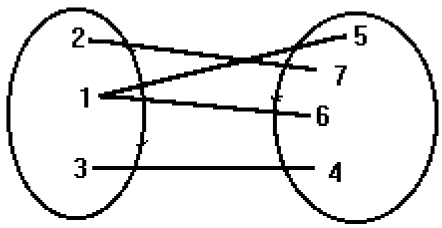


f)

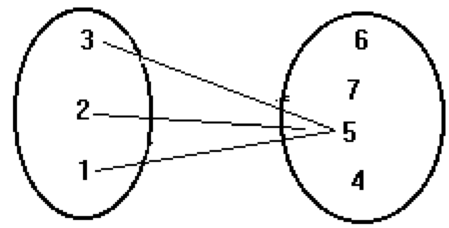


F2.- Indicar si las relaciones que se presentan a continuación son funciones:

a)



b)



F3.- Indicar cuáles de los siguientes conjuntos de relaciones definen una función:

a) $\{(1,-2),(2,3),(3,4)\}$ b) $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$

c) $\{(2,1),(1,1),(3,1),(1,3)\}$ d) $\{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}$ e) $\{(2,1),(7,8),(2,3),(5,4)\}$

F4.- Indicar cuáles de las siguientes expresiones definen a una función de R en R.

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\, x \geq 7 \\ x-1 & si\, x < 7 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 4x & si\ x<3 \\ (x-5) & si\, x<-2 \end{cases}$

F5.- Si $f(x)=3x-2$ y $g(x)=x-x^2$ encontrar los siguientes valores:

a) $f(2)$ b) $f(-2)$ c) $f(0)$ d) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

e) $g(1)+f(2)$ f) $g(-2)/f(-2)$ g) $f(1)$ h) $g(3)$

m) $f(1)+g(2)$ n) $g(0)\cdot f(-2)$ ñ) $f(a)$ o) $f(x+h)$

p) $f(-b)$ q) $f(ax)$ r) $f\left(\sqrt{x-1}\right)$ s) $f(g(x))$

F6.- Si $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ -8<x<1 \\ x-1 & si\quad x\geq 1 \end{cases}$ encontrar los siguientes valores:

a) $f(2)$ b) $f(-2)$ c) $f(0)$ d) $f(-9)$ e) $f(1)$

F7.- Indicar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a) $\{(3,0),(2,2),(1,2),(0,3)\}$ b) $\{(1,-2),(2,3),(-4,5)\}$

F8.- Determinar la imagen de f en cada uno de los siguientes incisos, si se considera como su dominio el conjunto $W=\{-2,0,1,3,14\}$.

a) $f(x)=-x-2$ b) $f(x)=\begin{cases} x+3 & si \quad x\leq 1 \\ 10x & si \quad x>1 \end{cases}$

F9.- Considerar las siguientes funciones:

$f_1 : [-2,2] \to R$ $\quad$ $f_2 : [0,4] \to R$ $\quad$ $f_3 : (-\infty, -6] \to R$ $\quad$ $f_4 : (-1,5) \to R$

La regla de correspondencia para todas estas funciones viene dada por: $f(x) = x^2$ es decir, a cada número x, mediante f, se le asigna x^2. Determinar la imagen de f_1, f_2, f_3, y f_4.

F10.- Si $f(x) = 3(x-2)^2 + 5$ con dominio $[-3,6]$ determinar el rango.

F11.- Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2$ $\quad$ b) $f(x) = \sqrt{3x-5}$ $\quad$ c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$ $\quad$ e) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$ $\quad$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+4}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-2x}$ $\quad$ h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-4}}$ $\quad$ i) $f(x) = \begin{cases} x-3 & si \quad x \le -3 \\ 10x & si \quad x > 3 \end{cases}$

Def. La gráfica de una función es **simétrica con respecto al eje *y*** si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se llega a la misma ecuación. La gráfica de una función es **simétrica con respecto al eje *x*** si al sustituir y por $-y$ en la ecuación se llega a la misma ecuación. La gráfica de una función es **simétrica con respecto al origen** si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se llega a la misma ecuación.

F12.- Determinar si la gráfica de las ecuaciones que aparecen en cada inciso presenta algún tipo de simetría, e indicar las intersecciones con los ejes.

a) $y = 3x^2$ $\quad$ b) $y = x^3$ $\quad$ c) $y = x^3 - 1$

d) $y = |x|$ $\quad$ e) $y = |x| + 2$ $\quad$ f) $y = |x-1|$

g) $y = \sqrt{x} + 2$ $\quad$ h) $y = \sqrt{-x}$ $\quad$ i) $y = \sqrt{x-4}$

j) $x^2 + y^2 - 6y = -8$ $\quad$ k) $x^2 + y^2 + 2x = 3$ $\quad$ l) $y = \sqrt{|x|}$

Def.(Thomas Pág. 23): f es una **función par** si $f(x) = f(-x)$, esto es la gráfica de $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje y. f es una **función impar** si $f(-x) = -f(x)$, esto es la gráfica de $y = f(x)$ es simétrica respecto al origen.

F13.- Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

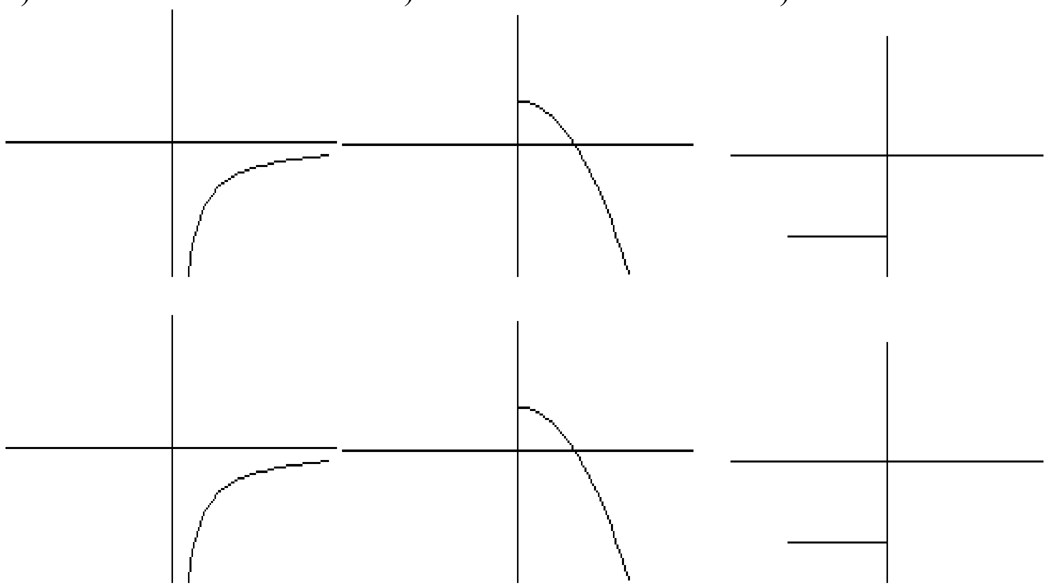
a) $f(x) = (x-2)^2$ $\quad$ b) $f(x) = x^2 + 3$ $\quad$ c) $f(x) = 3x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ e) $f(x) = -x^3$ $\quad$ f) $f(x) = x^3 + 2$

e) $y = |x|$ $\quad$ f) $y = |x| + 2$ $\quad$ g) $y = |x-1|$

F14.- Para cada inciso, completar la gráfica de tal manera que represente una función par y luego completar para que represente una función impar.

a) b) c)



Def.(Thomas Pág. 456) Una función $y = f(x)$ es **creciente** en un intervalo I si para dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, $x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$. na función $y = f(x)$ es **decreciente** en un intervalo I si para dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, $x_2 > x_1 \quad \Rightarrow$ $f(x_2) < f(x_1)$.

F15.- Para la gráfica de la función *f* que se presenta a continuación determinar:

a) $f(1)$, $f(-1.6)$, $f(0)$, $f(1.8)$,

b) el valor o valores de *x* para los que $f(x)$ es: -1.6, 1.8, -2.4,

c) en dónde la función interseca al eje *x*, y en dónde interseca al eje *y*,

d) si existen valores de *x* para los que no esté definida,

e) el dominio y la imagen de la función,

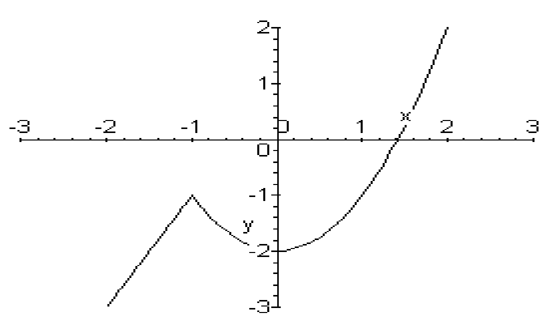
f) cuál es el máximo de la función y en dónde lo alcanza,

g) cuál es el mínimo de la función y en dónde lo alcanza,

h) dónde la función es positiva y dónde es negativa,

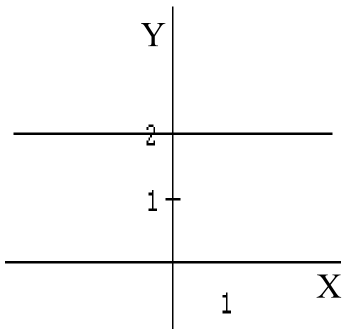
i) dónde la función es creciente y dónde es decreciente,

j) dibujar $f(x) - 1$, $-f(x)$,

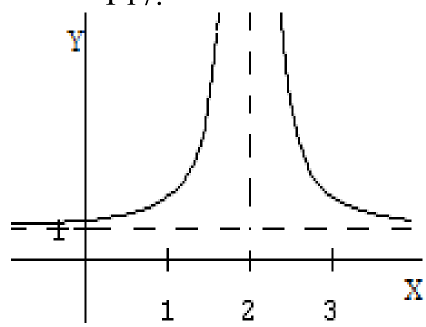


Para las gráficas que se presentan a continuación determinar:
a) Dominio y rango,
b) Intervalos en los que la función es positiva, intervalos en los que es negativa,
c) Intervalos en los que la función es creciente, intervalos en los que es decreciente,
d) Indicar si es una función par, impar o ninguna de las dos cosas.

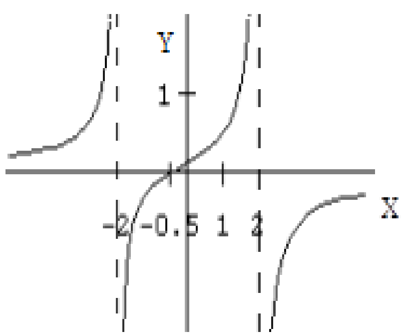
F16.-



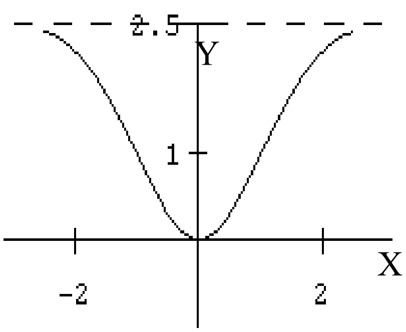
F17.-



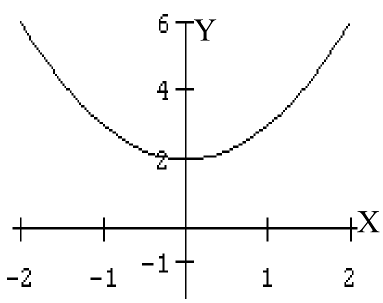
F18.-



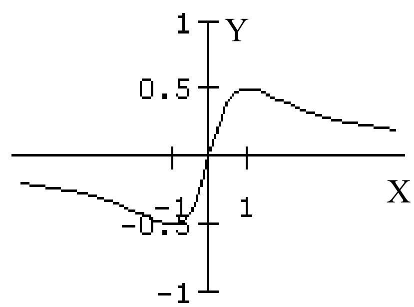
F19.-



F20.-



F21.-



TAREA: Swokowski Sec. 3.2 problemas 21, 22; Sec. 3.4 ejercicios 1 a 18, 19 a,b,c, 20 a,b,c, 21 a 32, 37 a 46, 55 a 57, 59 a 62, 64. Sección 3.5 del 1 al 12.

F22.- Al hacer un análisis del comportamiento final en la forma de una gráfica en la que la variable y depende de la variable x ¿cuál es la notación para cada de las siguientes expresiones?

a) “x se aproxima al valor a por la izquierda”, o “x tiende a a por la izquierda”.

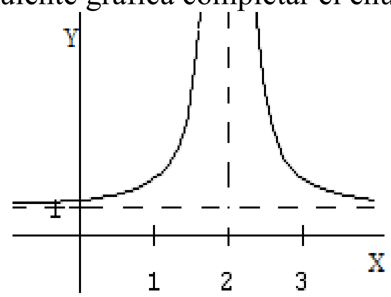
b) “x se aproxima al valor a por la derecha”, o “x tiende a a por la derecha”.

c) “x se aproxima al valor a”, o “x tiende a a”.

d) “y crece sin límite”, o “y tiende a infinito”.

e) “y decrece sin límite”, o “y tiende a menos infinito”.

F23.- Con la ayuda de la siguiente gráfica completar el enunciado:



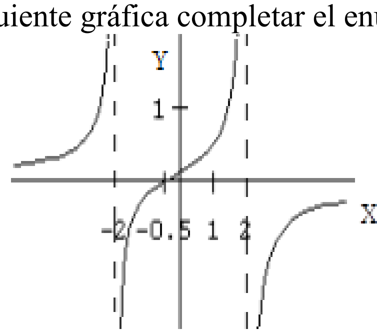
a) Si $x \to 2^+$ entonces $y \to$

b) Si $x \to -\infty$ entonces $y \to$

c) Si $x \to$ entonces $y \to 1$

d) Si $x \to$ entonces $y \to \infty$

F24.- Con la ayuda de la siguiente gráfica completar el enunciado:



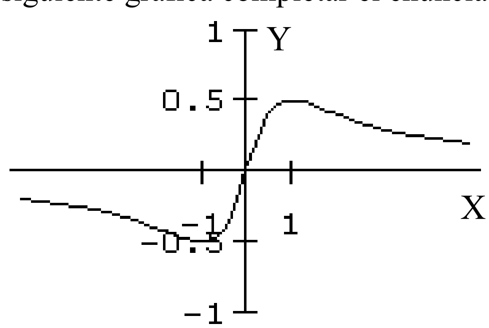
a) Si $x \to 2^+$ entonces $y \to$

b) Si $x \to -\infty$ entonces $y \to$

c) Si $x \to -0.5$ entonces $y \to$

d) Si $x \to$ entonces $y \to \infty$

F25.- Con la ayuda de la siguiente gráfica completar el enunciado:



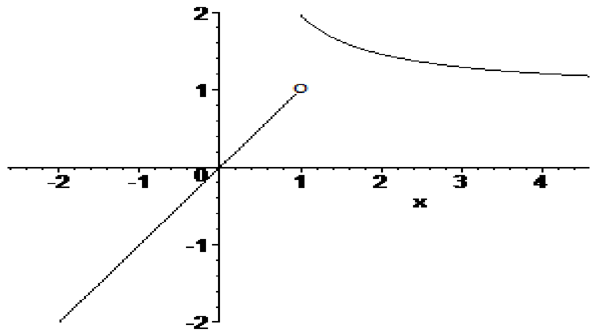
a) Si $x \to -1$ entonces $y \to$

b) Si $x \to -\infty$ entonces $y \to$

c) Si $x \to$ entonces $y \to 0$

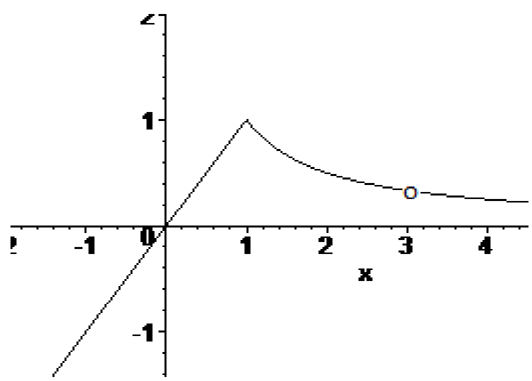
d) Si $x \to$ entonces $y \to 0.5$

F26.- Con la ayuda de la siguiente gráfica completar el enunciado:



a) Si $x \to 1^{+}$ entonces $y \to$ b) Si $x \to 1^{-}$ entonces $y \to$ c) $f(1) =$

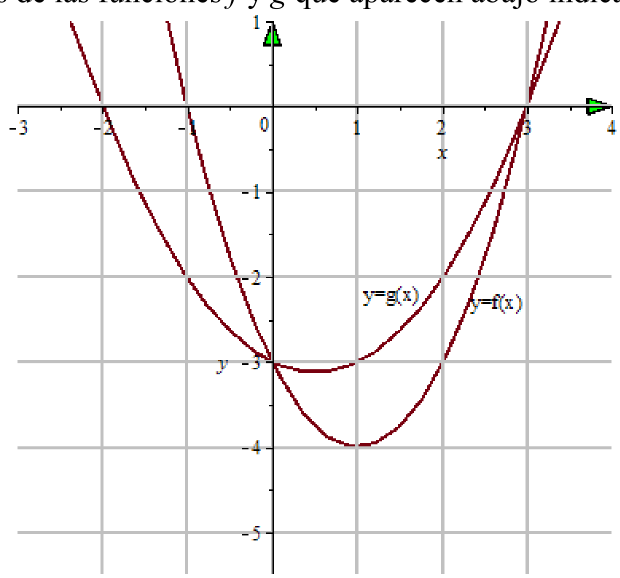
F27.- Con la ayuda de la siguiente gráfica completar el enunciado:



a) Si $x \to 3^{+}$ entonces $y \to$ b) Si $x \to 3^{-}$ entonces $y \to$ c) $f(3) =$

TAREA: Swokowski Sec. 3.2 problemas 23, 24; Sec. 3.4 problema 63.

F28.- De las gráficas de las funciones f y g que aparecen abajo indicar:



a) los intervalos en los que la función *f* es positiva, y en los que es negativa,
b) el valor o valores de *x* para los que $g(x)$ es -2,
c) el intervalo en el que $f(x) < -3$,
d) los intervalos en los que $g(x) \geq -3$,
e) si el valor de $f(1)$ es mayor, menor o igual que el de $g(1)$,
f) si el valor de $f(-1)$ es mayor, menor o igual que el de $g(-1)$,
g) si el valor de $f(3)$ es mayor, menor o igual que el de $g(3)$,
h) el o los valores de *x* para los que $f(x) = g(x)$.
i) el intervalo en el que $f(x) < g(x)$.

F29.- Trazar la gráfica de una función que sea creciente en $[-5,-2] \cup [4,7]$, decreciente en $[-2,4] \cup [7,\infty)$ y constante en $(-\infty,-5]$.

F30.- Trazar la gráfica de una función cuyas raíces se encuentren en 3 y 9, que sea positiva en $(-2,3) \cup (9,\infty)$, 4 en $(-\infty,-5)$ y negativa en el complemento.

F31.- Determinar el rango de la función $h(x) = x^2 + c$.

TAREA: Swokowski Sec. 3.4 problemas 19 d,e, 20 d,e, 33 a 36.

F32.- En cada inciso determinar la función lineal que satisface las condiciones dadas.

a) $f(0) = 2$ y $f(3) = -5$ b) $f(-1) = 2$ y $f(3) = 7$

F33.- Determinar la función cuadrática que pasa por los puntos $(0,-3)$, $(1,-3)$ y $(2,-2)$.

TAREA: Swokowski Sec. 3.4 problemas 53, 54.

Gráficas de funciones básicas

F34.- Graficar las funciones que aparecen en cada inciso.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x^4$ e) $f(x) = x^5$ f) $f(x) = \sqrt{x}$
g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ h) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ i) $f(x) = \sqrt[5]{x}$
j) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ k) $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$ l) $f(x) = \sqrt{x^3}$
m) $f(x) = |x|$ n) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ o) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

F35.- Graficar las funciones que aparecen en cada inciso.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\geq 2 \\ x & si \quad x\leq 1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} |x| & si \quad x\leq 1 \\ \sqrt{x} & si \quad 1<x\leq 4 \\ x & si \quad x>4 \end{cases}$

F36.- Graficar la **función máximo entero** se denota por $[\![x]\!]$, y se define como el máximo entero menor o igual que *x*.

$$f(x)=[\![x]\!]=\begin{cases} \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & si & -2\leq x<-1 \\ -1 & si & -1\leq x<0 \\ 0 & si & 0\leq x<1 \\ 1 & si & 1\leq x<2 \\ 2 & si & 2\leq x<3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}$$

Operaciones gráficas

F37.- Para cada operación analizar el efecto en la ecuación y en la gráfica de una función.

a) Desplazamiento vertical de una gráfica $y=f(x)+c$ (casos $c>0$ y $c<0$).

b) Desplazamiento horizontal de una gráfica $y=f(x-c)$ (casos $c>0$ y $c<0$).

c) Dilatación (estiramiento) o contracción (encogimiento) vertical de una gráfica $y=cf(x)$ (casos $c>1$ y $0<c<1$).

d) Reflexión con el eje *x* $y=-f(x)$

e) Dilatación (estiramiento) o contracción (encogimiento) horizontal de una gráfica $y=cf(x)$ (casos $c>1$ y $0<c<1$). Considerar que si $y=f(x)$ con $a\leq x\leq b$ y $c>0$ $y=f(cx)$ entonces $a\leq cx\leq b$ por lo tanto $\frac{a}{c}\leq x\leq\frac{b}{c}$.

f) Reflexión con el eje *y* $y=f(-x)$.

F38.- Graficar

a) $f(x)=x-3$ b) $f(x)=5x$ c) $f(x)=-x^2$

d) $f(x)=(-x)^2$ e) $f(x)=2(x+1)^3-3$ f) $f(x)=2[\![x]\!]$

g) $f(x)=\sqrt{5-x}$ h) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^4}$ i) $f(x)=-|x+2|-1$

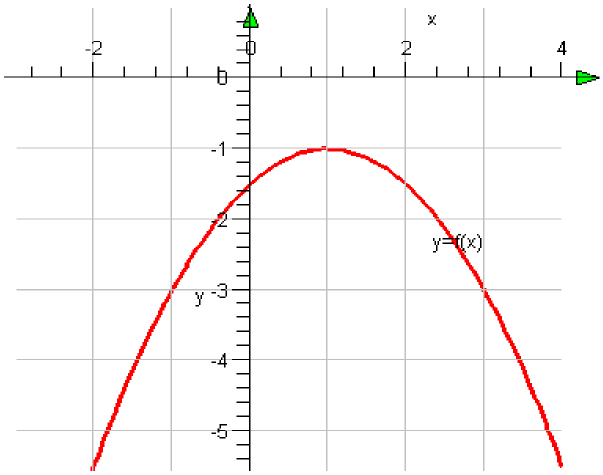
j) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ k) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ l) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

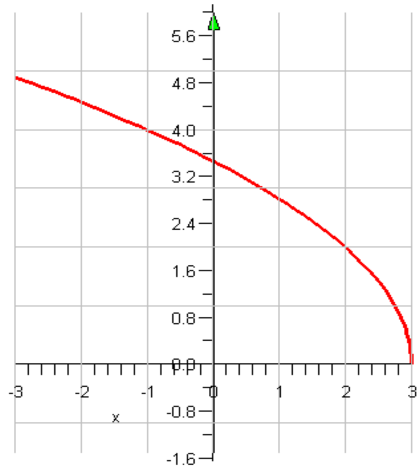
F39.- Para $f(x)=|x|$

a) Dibujar la gráfica después de aplicar primero un desplazamiento de 2 unidades hacia la derecha y luego una reflexión respecto al eje *y*.

b) Dibujar la gráfica después de aplicar primero una reflexión respecto al eje y y después 2 unidades hacia la derecha.

F40.- Determinar la función que corresponde a la gráfica que aparece en cada inciso.





F41.- Dibujar

a) $f(x)=2x^2+4x-1$

b) $f(x)=2x^2-20x+25$

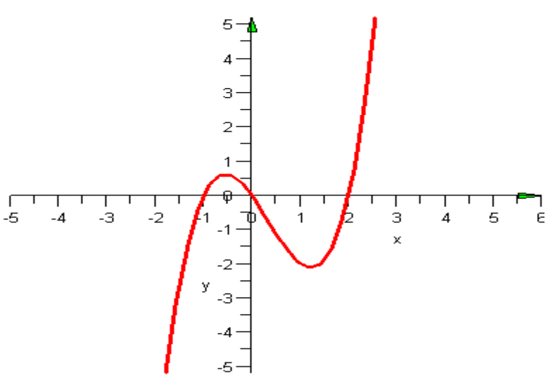
c) $f(x)=2(x+1)^3-6(x+1)^2+6(x+1)-2$

d) $f(x)=x|x-1|+3$ (con definición)

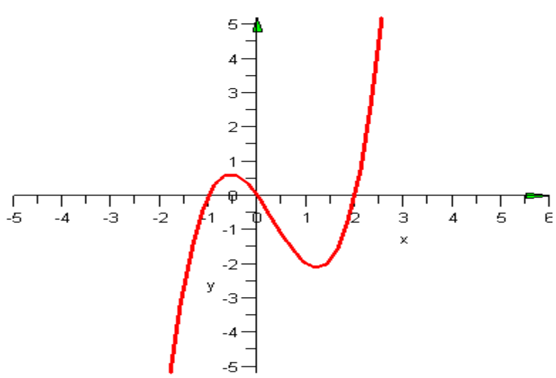
TAREA: Swokowski Sec. 3.2 problemas 1 a 20, Sec. 3.5 problemas 13 a 17, 19, 20, 22 a 25, problemas 41 y 42 incisos de a) a j).

F42.- En cada inciso aparece la gráfica de $f(x)$ dibujar lo que se solicita

a) $2f(x)$

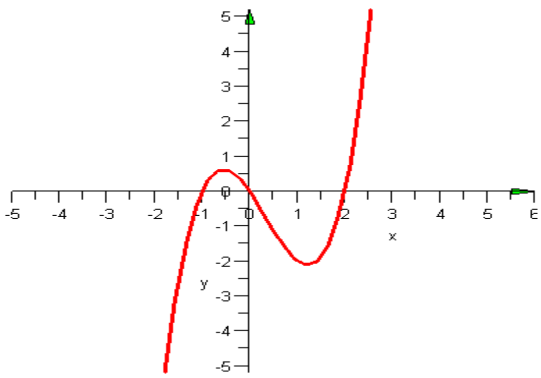


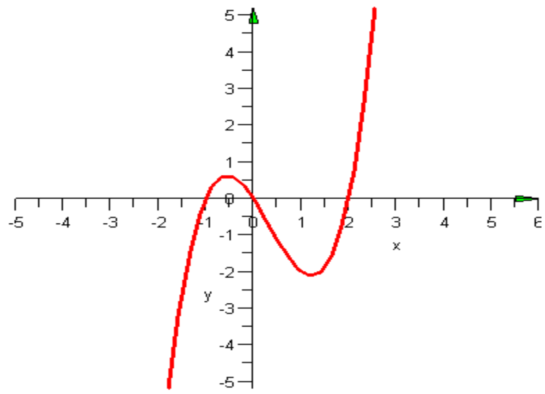
b) $f(2x)$



c) $\frac{1}{2}f(x)$

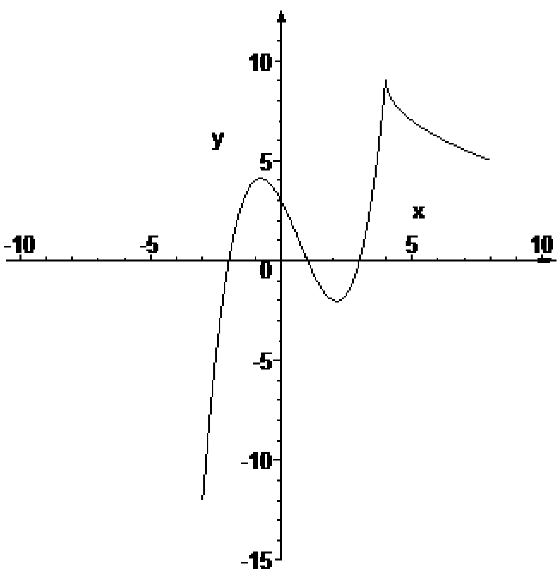
d) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

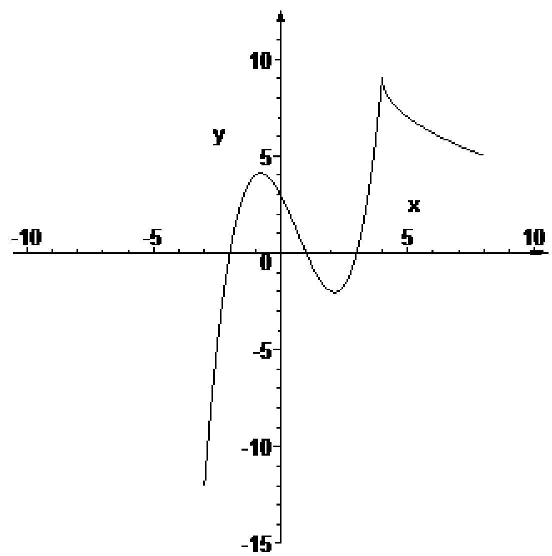




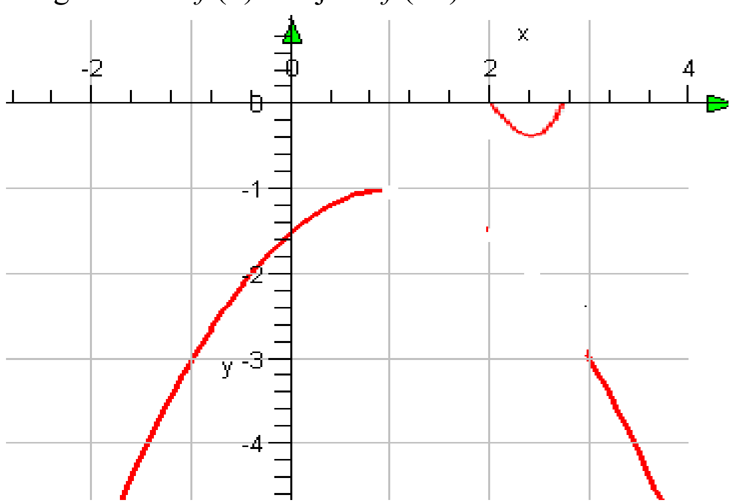
e) $-f(x)$

f) $f(-x)$.

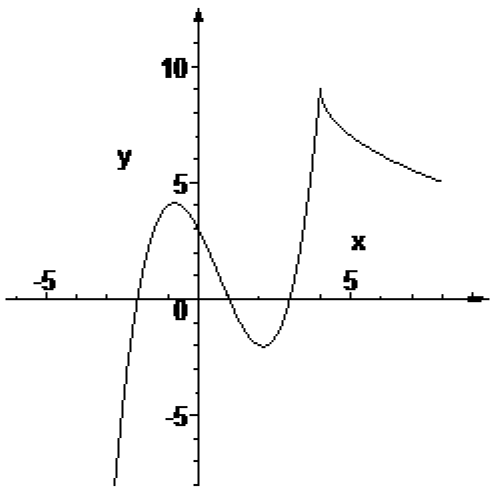


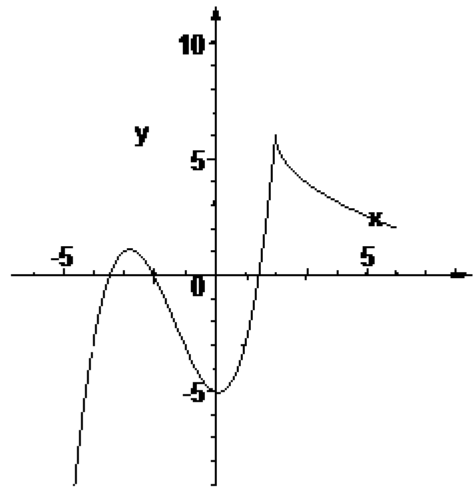


F43.- A partir de la gráfica de $f(x)$ dibujar $2f(-x)-1$



F44.- La primera gráfica corresponde a $f(x)$, determinar los valores de h y k tales que la segunda gráfica corresponda a $g(x) = f(x-h)+k$.





TAREA: Swokowski Sec. 3.5 problemas 33 a 39, 47 a 56.

F45.- a) (Sw.3.2,80) Graficar $|x|+|y|=5$ utilizando las ecuaciones $Y_1 = 5-|x|$ y $Y_2 = -Y_1$.

b) Encontrar las intersecciones con los ejes *x* y *y*.

c) Usar la gráfica para determinar la región $|x|+|y|<5$.

TAREA: Swokowski Sec. 3.4 problema 64, Sec. 3.5 problema 40, problemas 41 y 42 incisos de k) y l), 43 a 46, 57 a 64.

F46.- Dibujar las gráficas de

a) $y = \sqrt{4-x^2}+1$ b) $y = -\sqrt{9-x^2}+2$ c) $f(x) = \sqrt{|x|}$

d) $f(x) = \left|(x-1)^2-2\right|$ e) $f(x) = \left|(x-1)^2+2\right|$ f) $y = \left|(x-1)^2-1/2\right|$

TAREA: Swokowski Sec. 3.5 problemas 18, 21, 26.

F47.- (Sw.3.5,64) Si f tiene un dominio $D = [-6,-2]$ y el rango $R = [-10,-4]$, encontrar el dominio y el rango para cada función.

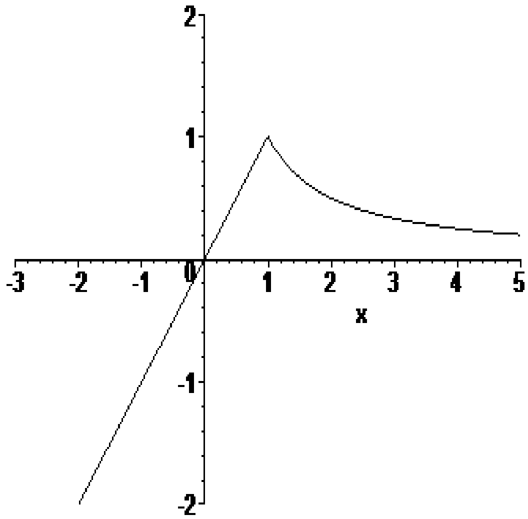
a) $y = \dfrac{1}{2}f(x)$ b) $y = f(2x)$ c) $y = f(x-2)+5$

d) $y = f(-x)$ e) $y = -f(x)$ f) $y = f(|x|)$, g) $y = |f(x)|$

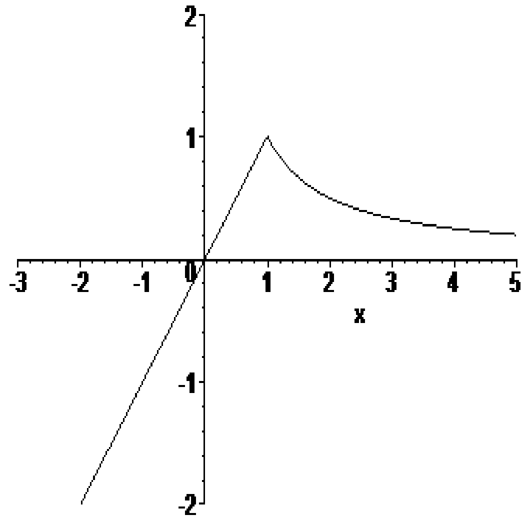
TAREA: Swokowski Sec. 3.5 problemas 63, 64.

F48.- Si la gráfica en cada inciso corresponde a $f(x)$, dibujar lo que se solicita.

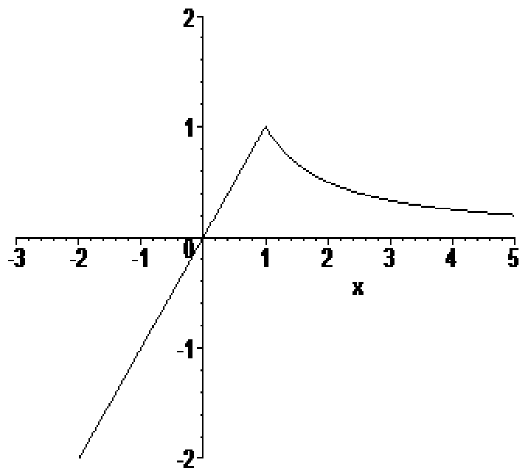
a) $g(x) = |f(x)|$



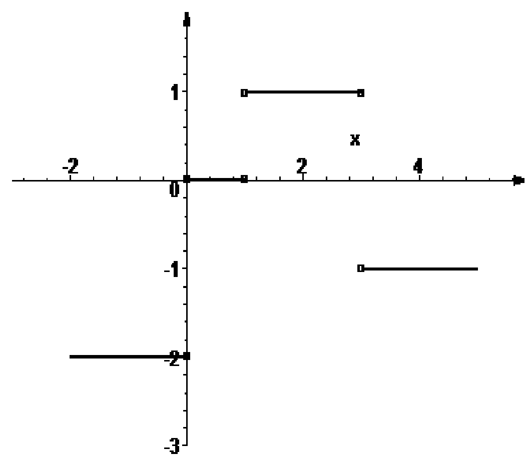
b) $h(x) = f(|x|)$



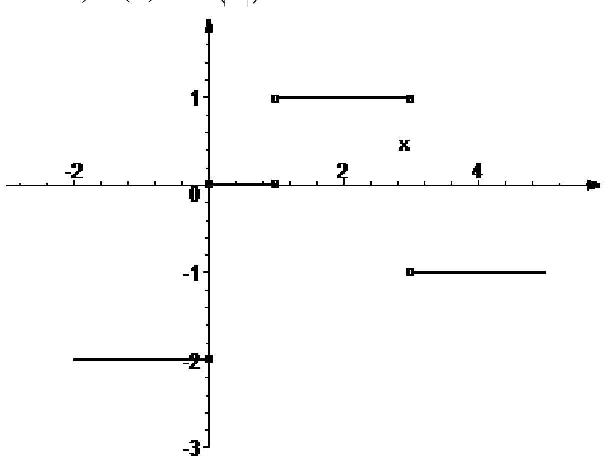
c) $g(x) = |f(|x|)|$



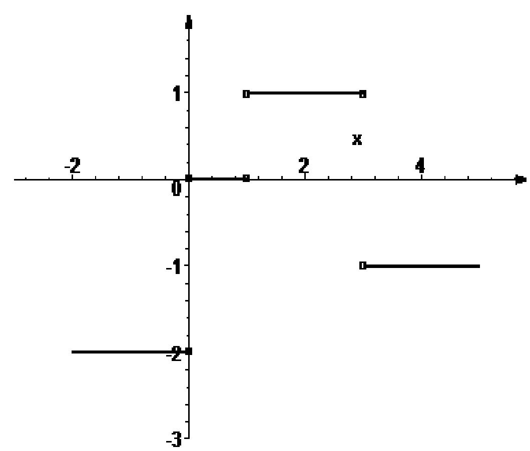
d) $r(x) = |w(x)|$



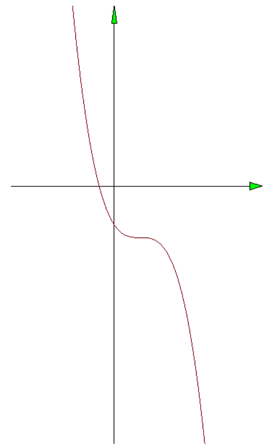
e) $r(x) = w(|x|)$



f) $r(x) = |w(x)|$

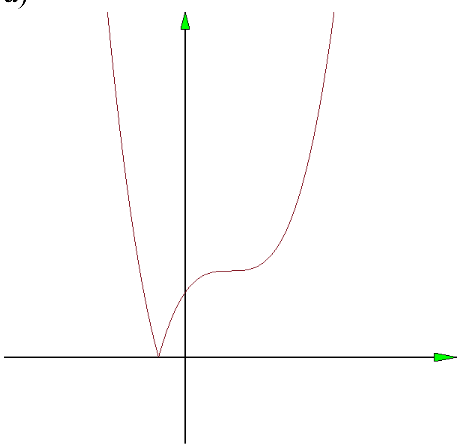


F49.- La gráfica $y = f(x)$ a continuación.

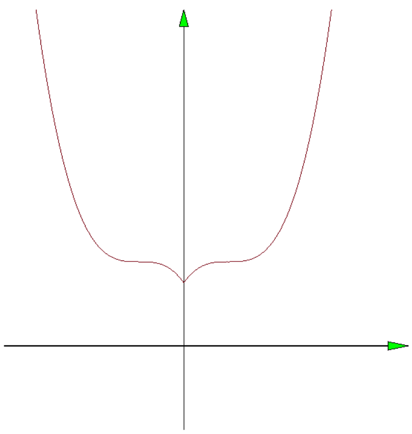


Relacionar las gráficas de cada inciso con la ecuación que le corresponde ($y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$, $y = -|f(x)|$)

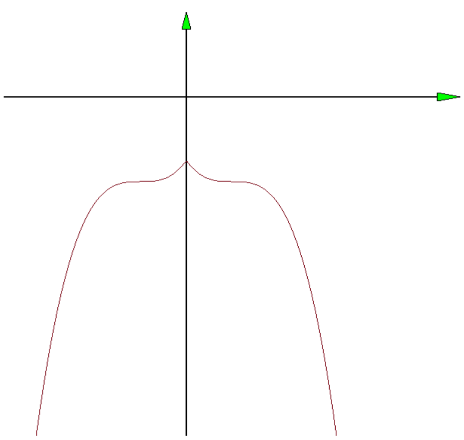
a)



b)



c)



d)