Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2024.

Laboratorio 14: Integrales Triples

1. Encuentra el valor de $a > 0$ tal que $\iiint_{D_a} (x + y + z) dxdydz = 64$, donde D_a es el paralelepípedo en el espacio xyz dado por $[0, a] \times [0, 2a] \times [0, a]$.
2. Sea D la región sólida en $\mathbb{R}^3$ acotada por las superficies $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x$, $z = 0$, $z = x^2 + y$. Escribe $\iiint_D f(x, y, z) dxdydz$ como una integral triple iterada.
3. Sea D la región sólida en $\mathbb{R}^3$ acotada por las superficies $y = x^2$, $y = x$, $z = 0$, $z = 2x$. Encuentra el valor de $\iiint_D y dxdydz$.
4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f \geq 0$. El sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x la región plana delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas $x = a$, $x = b$, está dado por

   $$D = \left\{ (x, y, z) \,|\, x \in [a, b],\, -f(x) \leq y \leq f(x),\, -\sqrt{(f(x))^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{(f(x))^2 - y^2} \right\}.$$

   Usa la igualdad $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{\pi r^2}{2}$, $\forall r \geq 0$, para demostrar que el volumen de D, dado por la integral $\iiint_D 1 dxdydz$, es igual a $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.
5. Encuentra el valor de $\iiint_D (2z + \sqrt{x^2 + y^2}) dxdydz$, donde

   $$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4,\, z \in [0, 1] \right\}.$$

6. Encuentra el valor de $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, donde

   $$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\, x \leq 0,\, y \leq 0,\, z \geq 0 \right\}.$$

7. Sea $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{T}(u, v, w) = (u + v, v - 2w, u - w)$. Sea $D^* = [0, 1] \times [-2, 0] \times [0, 1]$. Encuentra el valor de $\iiint_D (x - y + z) dxdydz$, donde $D = \mathbf{T}(D^*)$.