INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 17: Series

1. En cada inciso, encuentra el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{11^{n+1}}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n 5^n}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+2}}$.

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}$.

   e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n-1}}{2^{n+2}}$.

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_0 e^{-nbt_0}\,,\ \ c_0, b, t_0 > 0$.

   g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}$.

2. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$.

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}(k\pi)$.

   c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)$.

   d) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j^2}$.

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$.

   g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$.

   h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^{3/2}}$.

   i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\big(\ln(n)\big)^2}$.

   j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^{1/n}$.

   k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

   l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3!\ n!\ 3^n}$.

   m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}$.

   n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

   ñ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.

   o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{2n}}$.

   p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$.

   q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^{1.1}}$.

   r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

.

3. Encuentra el valor de

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

4. Demuestra que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n^{\alpha}+1}-\sqrt{n^{\alpha}}\right)$$

es convergente, si $\alpha > 2$ y divergente de cualquier otra manera.

5. Encuentra la expansión polinomial de Taylor alrededor de $x_0 = 0$ de la función

$$F(x)=\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

y prueba que su residuo tiende a cero, cuando $n\to\infty$ para todo $|x|\leq 1$.

Cazuelazo semanal.

- Calcula el área del copo de nieve de Koch (buscar imágenes en internet) y el perímetro de su curva.

- Sea $a\in\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable a todo orden. Dada la función $R_n(x)$ definida por medio de

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u\,,\quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}\,,$$

prueba que, si $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M^n$ para toda $n\in\mathbb{N}$ y $M>0$, entonces $R_n(x)\to 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.