INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 16: Sucesiones

1. Demostrar que:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2.$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-2n^3) = -\infty.$

2. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\pi^2 + \frac{1}{n}\right).$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n.$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0.07}{n}\right)^n.$

   d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right).$

   e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+1}{3-5n^2}.$

   f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}$

   g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(n^2\right)}{\ln(1+n)}.$

   h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,(n+2)}{2n^2}.$

   i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n.$

   j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+1}{n}.$

   k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n\,\frac{n}{n+1}.$

   l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}.$

   m) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[n - \ln\left(3e^n+1\right)\right].$

   n) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right).$

3. Determinar el valor al que converge la sucesión $a_n = [\ln(n)]^{1/n}$ sin utilizar la Regla de L'Hôpital en alguna función auxiliar. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

4. a) Suponga que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y que $\{b_n\}_{n=m}^{\infty}$ es acotada. Muestra que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

   b) Usando el inciso anterior, verifica los siguientes límites:

      i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0.$

      ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$

5. Sea $a > 0$, encontrar el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2n-1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4n+1}\right)\left(n^4+a\right)^{1/4}}.$$

6. Considera la sucesión $I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx} \right) dx.$

   a) Demuestra, justificando con detalle, que

   $$I_n = n \ln \left(\frac{1+n}{n} \right).$$

   b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Cazuelazo semanal.

- Sea $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 2$. Demuestra que, si $a_n \leq 2$ para todo $n \geq 1$, entonces $a_n \leq a_{n+1}$ y $a_n \to 2$ cuando $n \to \infty$.
- Muestra que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$.
- Demuestra que:

  a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

  b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a,b), \;\; a, b > 0.$