Concavidad y puntos de inflexión

1. Determina el valor de las constantes a, b y c tales que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ cumpla con las siguientes condiciones:
   (a) máximo relativo en $x = -2$,
   (b) mínimo relativo en $x = 1$,
   (c) punto de inflexión en $x = -1/2$,
   (d) la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(2, 6)$.

   Utiliza los valores encontrados de a, b y c para determinar
   (e) intersección con el eje vertical,
   (f) intervalos de monotonía,
   (g) intervalos de concavidad,
   (h) puntos de inflexión,
   (i) comportamiento cuando $x \to \pm\infty$.

Gráficas

1. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ considerando los puntos que se mencionan a continuación:
   - dominio,
   - intersección con los ejes,
   - puntos críticos e intervalos de monotonía,
   - máximos y/o mínimos locales,
   - intervalos de concavidad,
   - puntos de inflexión,
   - comportamiento cuando $x \to \pm\infty$,
   - asíntotas.
2. La función $f(x) = x^{1/2}(2 - x)^{3/2}$ cuenta con segunda derivada $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{x^{3/2}\sqrt{2 - x}}$. Bosqueja la gráfica de $f(x)$ considerando:
   - dominio,
   - intersección con los ejes,
   - puntos críticos e intervalos de monotonía,
   - máximos y/o mínimos locales,
   - intervalos de concavidad,
   - puntos de inflexión,
   - recta tangente vertical en el punto $(0, 0)$ (justificar).
3. Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ que satisfaga las siguientes condiciones:
   - $f(x)$ pase por los puntos $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(1, 3)$,
   - $f(x)$ sea diferenciable en $\mathbb{R}$,
   - $f'(x) = 0$ para $x = -3$, $x = 1$,
   - $f'(x) < 0$ cuando $x < -3$ o $x > 1$,
   - $f'(x) > 0$ cuando $-3 < x < 1$,
   - la gráfica de $f(x)$ es convexa si $x < -1$,
   - la gráfica de $f(x)$ es cóncava si $x > -1$,
   - $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$,
   - $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.