Tasas relacionadas

1. Una escalera con longitud de 10m está inclinada sobre una pared. La escalera se desliza manteniendo un punto de contacto con la pared (punto superior) y un punto de contacto con el piso (punto inferior). Si la parte superior de la escalera se desliza sobre la pared a una rapidez de 2m/s, determinar qué tan rápido se aleja la parte inferior de la escalera cuando esta se encuentra a 6m de la pared.

2. Una partícula se desplaza, en el plano xy, a lo largo de la curva $y\cos(xy) + x = \pi$, aumentando en el valor de x y disminuyendo en el valor de y. En el momento que la partícula alcanza el punto $(\pi, 0)$, la coordenada x aumenta a una rapidez de 1cm/s ¿Qué tan rápido cambia la coordenada y de la partícula en ese instante de tiempo?

3. Un papalote que está a 5m del piso se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 1m/s. ¿Con qué velocidad disminuye el ángulo entre la cuerda y el piso cuando se han soltado 30m de cuerda?

4. Una persona cuya estatura es de 2m se aleja, a una velocidad constante de 2m/s, de una lámpara que está colocada en un poste, a una altura de 7.5m. ¿A qué velocidad se aleja la sombra de la persona (la punta) del poste?

Teorema Rolle y Teorema Valor Medio

1. Sea $f(x) = \sqrt{5x-2}$, determina el número c que satisfaga el TVM para $f(x)$ en el intervalo $[3/5, 4]$.

2. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Verifica si $f(x)$ cumple todas las hipótesis del TVM en el intervalo $[-1, 1]$.

3. Muestra que la función $f(x) = x^5 + x^3 + x - 5$ tiene exactamente una raíz real.

4. Muestra que la ecuación $2x - 1 = \operatorname{sen}(x)$ tiene exactamente una raíz real.

5. Supongamos que la función f es es continua en $[a, b]$ y que $f'(x) = 1$ para toda $x \in (a, b)$. Demuestra que $f(x) = x - a + f(a)$ para toda $x \in [a, b]$.

6. Muestra que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), con $f'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$, es inyectiva.

7. Considera la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$, diferenciable en $(0, 1)$, que satisface $f(0) = 1$ y $f'(x) \geq 3 \ \forall x \in (0, 1)$. Utiliza el TVM y el TVI para mostrar que existe un único $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 7/2$.

8. Utilice el Teorema del Valor Medio para demostrar que $\dfrac{y-x}{2\sqrt{y}} < \sqrt{y} - \sqrt{x} < \dfrac{y-x}{2\sqrt{x}}$ para $0 < x < y$.

Observaciones y sugerencias

6. La función $f(x)$ es inyectiva si para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$, se cumple $f(x_1) \neq f(x_2)$.

7. La idea es determinar una desigualdad para $f(x)$ y mostrar que existe un punto x_0 de tal forma que $f(x_0) > 7/2$, posteriormente aplicar TVI.

8. Considera la función $f(w) = \sqrt{w}$ en el intervalo $[x, y]$.