Derivada puntual

1. Dada la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$, utiliza la definición de derivada para calcular $f'(2)$.

2. El límite $I = \lim_{h \to 0} \frac{\sec(\pi + h) + 1}{h}$ corresponde a la derivada de alguna función $f(x)$ en cierto punto x_0.

   (a) Identifica $f(x)$ y x_0.

   (b) Utiliza el inciso anterior para calcular I.

3. Sea $g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & x \leq 1, \\ -x^2 + 6x, & x > 1. \end{cases}$

   (a) Determina si g es continua en $x = 1$.

   (b) Determina si g es derivable en $x = 1$.

4. Sea $s(t) = p(t)q(t) + \frac{3t}{r(t)}$, calcula $s'(0)$ si las funciones p, q, r y sus derivadas cuentan con los siguientes valores:

t	$p(t)$	$q(t)$	$r(t)$	$p'(t)$	$q'(t)$	$r'(t)$
0	1	2	3	4	5	-2

5. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $f(-1) = 3$, $f'(-1) = 5$, $g(-1) = 1$ y $g'(-1) = -2$, calcular $\left(\frac{fg}{1+g}\right)'(-1)$.

Derivada funciones

1. Calcula la derivada de la función $f(x) = |x - 3|$, $x \in \mathbb{R}$. ¿En qué puntos es derivable $f(x)$?

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

   (a) $g(t) = \frac{1 - 2t}{3 + t}$, $t \neq -3$

   (b) $h(x) = x + \sqrt{x}$, $x \geq 0$

   (c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{8 - 3x}$, $x \neq 8/3$

   (d) $r(s) = \cos(s)(s^3 + 2s - 1)\sqrt{s}$, $s \geq 0$

3. Considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{x + 1}, & x > 0, \\ x^2 + bx, & x \leq 0. \end{cases}$

   (a) Determina todos los valores posibles de a y b de manera que la función f sea continua en su dominio.

   (b) Determina todos los valores posibles de a y b de manera que la función f sea derivable en su dominio.

   (c) Para los valores determinados en el inciso anterior calcular $f'(x)$.

Rectas tangentes y linealización

1. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2024$ en el punto $(1/4, 2026)$.

2. Dada la función real $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c parámetros reales, determina todos los posibles valores de a, b y c de tal forma que la gráfica de la función f pase por los puntos $(1, 2)$, $(3, 6)$ y la recta tangente a la gráfica de f en $(3, 6)$ sea paralela a la recta $y = 4x$.

3. Da un valor aproximado de $\sqrt[3]{7.99}$.

4. Estima el valor de $\sec(0.004^0)$.

Observaciones y sugerencias

5. Define $h(x) = \left(\dfrac{fg}{1+g}\right)(x) = \left(\dfrac{f(x)g(x)}{1+g(x)}\right)$, posteriormente calcula $h'(x)$ y evalúa en $x = 1$.

2(d). Agrupa términos y aplica regla de derivación de producto dos veces. Hay varias formas para agrupar al derivar, una es así: $r'(s) = \cos'(s)[(s^3 + 23 - 1)s]'$.

3. La continuidad y derivabilidad se estudia en intervalos abiertos $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, se justifica que sea continua o derivable mencionando el tipo de funciones (racional con denominador diferente de cero y polinomio). En esos intervalos no se tiene restricción para a y b. El estudio de la continuidad en $x = 0$ de forma puntual crea una primera restricción para los parámetros. Considerando la derivabilidad puntual en $x = 0$ se obtiene una segunda restricción para los parámetros. Una vez determinados a y b se conoce totalmente $f(x)$. Para $x > 0$ la derivada se calcula con las reglas usuales utilizando $f(x) = (x - a)/(x + 1)$, algo similar para $x < 0$ con $f(x) = x^2 + bx$. La derivada en $x = 0$ se calcula utilizando definición de derivada con $h \to 0^+$ y $h \to 0^-$.

4. Se necesita convertir a radianes para realizar la aproximación lineal.