CALCULO 1

EJERCICIOS (SEGUNDO DEPARTAMENTAL)

AVISO IMPORTANTE: AVISO IMPORTANTE: En el siguiente documento encontrarás ejercicios de diferentes examenes correspondientes al segundo departamental (aplicados en distintos semestres de Primavera 2018 a Otoño 2022). Recuerda que esto NO es una lista exhaustiva del tipo de ejercicios que pueden venir en un departamental. Además a partir del semestre de Otoño 2022 se agregan las funciones logaritmo y exponencial para determinar dominios y algunos límites.

I. REGLAS DE DERIVACION

1. (Prim 2022) En cada inciso determina la derivada que se pide (no es necesario simplificar)

   a) $g'(x)$ si $g(x) = x\sqrt{2-7x^2}$

   b) $h'(x)$ si $h(x) = \dfrac{x^3\cos(2x)}{x^2+x}$

   c) Sean f y g dos funciones derivables. La función g es biyectiva y por lo tanto tiene inversa. Calcula $\left(f\circ g^{-1}\right)'(7)$, si sabemos que $g(2)=7$, $f'(2)=4$, $g'(2)=-8$, $f'(7)=15$ y $g'(7)=-5$

2. (Oto 2020) Si $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$ y sabemos que $f(1)=7$ y $f'(1)=4$. Calcula $h'(1)$

3. (Prim 2020) Calcula el valor de la derivada en $x=0$ de $g\left(\sqrt{f(x)}\right)$ si $f(1)=1$, $f'(1)=2$ y $g'(1)=-3$

4. (Oto 2019) Deriva la función. NO es necesario simplificar

$$f(x)=x^{-3}(1-2\cos(\sqrt{x})(1+\text{sen}(\sqrt{x}))$$

5. (Prim 2019) Calcular la derivada de la siguiente función. (No es necesario simplifcar)

$$f(x)=\left(\cos\left(\frac{x^3+3}{x^4+2}\right)\text{sen}\left(\sqrt{2x}\right)\right)$$

6. (Oto 2018) Calcula las derivadas siguientes. No es necesario simplifcar

   a) $f(x)=x^2\text{sen}\left(4x^3\right)+\dfrac{5}{x}$

   b) $f(x)=\dfrac{(4-x)^5}{x-x^2}$

7. (Prim 2018)

   a) Deriva la siguiente función. No es necesario simplificar.

$$f(x)=4\left(\text{sen}\left(\sqrt{x-x^2}-3\tan\left(\frac{3x^5-2x}{\sqrt{x-2}}\right)\right)\right)^5$$

   b) Sean f y g funciones y $h=\sqrt{f\circ g}$. Calcula $h'(1)$ usando los datos que necesites de la siguiente tabla.

$f(1)$	$g(1)$	$f(3)$	$f'(1)$	$g'(1)$	$f'(3)$	$g'(3)$	$f'(7)$
7	3	4	6	6	8	4	5

II. INTERPRETACION DE LA DERIVADA (GRAFICAMENTE)

1. (Oto 2020) Considera una función con las siguientes características:

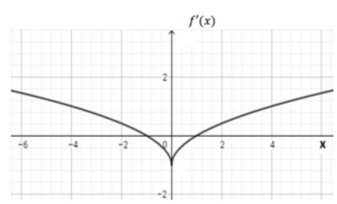
   - Su dominio son todos los reales excepto 2
   - Es continua y derivable en todo su dominio.
   - Los puntos $P_1 = (0, -2)$ y $P_2 = (3, 1)$ son los únicos puntos en los que la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal.
   - $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$
   - $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 2) \cup (2, 3)$
   - $f''(x) > 0$ si $x \in (2, \infty)$
   - $f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 2)$

   Bosqueja la gráfica de tal manera que se aprecien todas las características de f. Determina la imagen (rango) de f.

2. (Oto 2018) Dibuja cuidadosamente la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

   - f es diferenciable en $\mathbb{R}$
   - $f'(x) = 0$ si $x = -3$, $x = 1$ (sólo en esos puntos)
   - $f(x)$ es negativa si $x < -3$ y cuando $x > 3$
   - $f'(x)$ es positiva si $-3 < x < 1$
   - La gráfica es cóncava hacia arriba si $x < -1$
   - La gráfica es cóncava hacia abajo si $x > -1$
   - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
   - $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

3. (Prim 2018) La siguiente gráfica representa la DERIVADA de la función f



   a) Determina en qué intervalo(s) es creciente la función f
   b) Determina en qué intervalo(s) es negativa f''
   c) ¿Para qué valores de x está bien definida f'? Justifica.
   d) ¿Para qué valores de x está bien definida f''? Justifica

III. DEFINICIÓN DE DERIVADA

1. (Prim 2022) Sea $f(x) = (ax)^2 + b$. Determina $f'(3)$ usando la definición de derivada (límite)

2. (Oto 2020)

   a) Escribe la definición de derivada de una función f
   b) Escribe el límite que tendrías que calcular para obtener por definición la derivada de f si $f(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)$

3. (Prim 2020) Utiliza la definición de derivada para calcular $f'(4)$ si

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

4. (Prim 2029) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \tag{1}$$

   a) Determinar si la función es continua en $\mathbb{R}$. Justificar.
   b) Determinar si la función es derivable en $\mathbb{R}$. Justificar.

5. (Oto 2018) Calcula $f'(9)$ utilizando la definición si $f(x) = \sqrt{5-x}$
6. (Prim 2018) Usando la definición de derivada determina $f'(-1)$ si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

IV. DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

1. (Oto 2020) Sea $f(x) = \sin(\pi x) + 5x$. Calcula $f(1)$ y $f^{-1'}(5)$
2. (Oto 2019) Sea $g(x) = f^{-1}(x)$. Determina $g'(-6)$ si $f(x) = 3x^3 + x - 2$

V. DERIVACIÓN IMPLÍCITA / DETERMINAR PUNTOS DE GRÁFICAS CON PENDIENTES DADAS

1. (Prim 2022) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2y + y^3 - y + 2x = 1$$

   en el punto $P = (1, -1)$

2. (Oto 2022) Calcula $\dfrac{dy}{dx}$ si tenemos la ecuación de la curva $x^2y^2 + 4xy = 12y$.
   Determina la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(2, 1)$
3. (Prim 2020) Considera la curva dada por la ecuación

$$\operatorname{sen}(x - y) = x\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$$

   Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

4. (Oto 2019) Encontrar la pendiente a la recta tangente a la curva en el punto $(0, -2)$

$$y^3 - 6xy + 4x + 8 = 0$$

5. (Prim 2019) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2$ en los puntos donde la pendiente m de dicha recta tangente es $m = -2$
6. (Prim 2019) Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(1, 1)$ para la ecuación

$$g(xy) + x^2\operatorname{sen}(g(x)) = \pi x^2$$

   si sabemos que $g(1) = \pi$ y $g'(1) = 3$

7. (Oto 2018) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica definida implícitamente por

$$3y^2 - x^2\sqrt{y} + x^3 = 3$$

   en el punto $(1, 1)$

8. (Prim 2018) Encuentra los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2 = 3$, en los cuales la recta tangente a dicha curva es perpendicular a la recta $y = x - 2$

VI. OPTIMIZACIÓN EN INTERVALO CERRADO

1. (Prim 2020) Determina los puntos donde la función h alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en el intervalo $[-3, 0]$ si $h(t) = (t^2 - 1)^{1/3}$
2. (Oto 2019) Sea $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+5}$ con $x \in [-6, 2]$. Determina (si los hay) los óptimos globales (máximos y mínimos). Justifica

VII. TASAS RELACIONADAS

1. (Prim 2022) La longitud l de un rectángulo disminuye a razón de 2 cm/seg, mientras que el ancho w aumenta a razón de 3 cm/seg.

   a) Determina el área A del rectángulo en función de l y w

   b) Determina la tasa de cambio del área del rectángulo, cuando $l = 12$ cm y $w = 5$ cm. ¿El área está aumentando o disminuyendo? (No olvides incluir unidades en tu respuesta).

2. (Oto 2021) Se estima que el número Q de unidades de un artículo que se producirán cuando se empleen L horas-trabajador será de $Q(L) = 300L^{\frac{1}{3}}$ unidades. También se estima que el nivel de mano de obra varía con el tiempo de manera tal, que dentro de t meses se emplearán $L(t)$ horas trabajador, donde $L(t) = \sqrt{140 + 3t - t^2}$ para $0 \leq t \leq 12$.
   ¿A qué tasa cambiará la producción Q respecto al tiempo dentro de 8 meses? ¿La producción crecerá o decrecerá? Debes justificar tu respuesta.

3. (Oto 2020) Supongamos que V y W son funciones del tiempo t y que están relacionadas por la ecuación
   $$V^2 + 3VW + W = 1$$
   Si sabemos además que $V(5) = 2$ y $\dfrac{dV}{dt}(5) = 3$, calcula $\dfrac{dW}{dt}(5)$

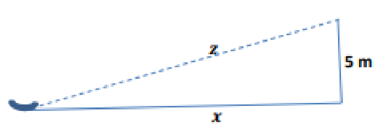
4. (Prim 2020) Supongamos que un bloque de hielo tiene la forma de un cubo (perfecto). Conforme se va derritiendo, la arista disminuye a una tasa de 2 cm/min. ¿A qué tasa está cambiando el volumen del bloque?

5. (Oto 2019) Considera un triángulo rectángulo de catetos a y b. Si el cateto a decrece a razón de 0.7 cm/min y el cateto b crece a razón de 4cm/min, determina la variación del área del triángulo cuando a mide 18 cm y b mide 14 cm.

6. (Prim 2019) Un rectángulo se expande con el tiempo. La diagonal del rectángulo aumenta a razón de 1 cm/min y el largo de dicho rectángulo crece a razón de 0.5 cm/min.
   ¿Qué tan rápido crece el ancho cuando este mide 6 cm y el largo 8 cm?

7. (Oto 2018) Cuando cierto artículo se vende a p dólares, los consumidores compran $D(p) = \dfrac{4000}{p}$ unidades por mes. Se estima que dentro de t meses, el precio del artículo será $p(t) = 0.4t^{3/2} + 6.8$ dólares por unidad.
   ¿A qué razón cambiará la demanda mensual del artículo con respecto al tiempo dentro de 4 meses? Es necesario que especifiques en tu resultado si la demanda aumenta o disminuye.

8. (Prim 2018) Desde un muelle de 5 metros de altura sobre el nivel del agua, una persona jala una lancha mediante una cuerda. Si la rapidez con la que jala la cuerda es de 1 metro por segundo, calcula la rapidez con la que la lancha se acerca al pie del muelle, en el momento en que se encuentra a 12 metros del pie del muelle.



VIII. TEOREMA DE BOLZANO O TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

1. (Prim 2022) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x = x - 1$ tiene al menos una solución.

2. (Prim 2020) Demuestra que $\cos(x) = x^4 - 2x$ tiene al menos dos soluciones en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3. (Oto 2019) Demuestra que la ecuación siguiente tiene al menos una solución:
   $$2x^3 - x^2 = 1 - 2x$$

4. (Prim 2019) Demostrar que las gráficas de las siguientes funciones se intersectan en al menos un punto
   $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3$ y $g(x) = 4 - 3x^2$

5. (Oto 2018) Demuestra que la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x} - x^2$ interseca (corta) al menos una vez la gráfica de $g(x) = 1 - 2x$

6. (Prim 2018) Demuestra que la ecuación

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1 - x^2$$

   tiene al menos una solución en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

IX. IMPLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

1. (Prim 2022) Sea $f(x) = \left((x+5)^2 + 1\right)^7$
   a) Determina $f'(x)$
   b) Determina en qué intervalo es creciente y en qué intervalo es decreciente la función
   c) Indica si la función tiene máximos o mínimos

2. (Prim 2020) Sea $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 3$
   - Determina los intervalos donde la función f es creciente
   - Determina los valores de x donde $f''(x)$ es negativa

3. (Oto 2019) Considera $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$. Encuentra, si los hay, los puntos críticos de f. Determina los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente. Utiliza la información para determinar los puntos óptimos (máximos y mínimos)

X. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

1. (Oto 2020) ¿Es posible aplicar el Teorema de Rolle a la función

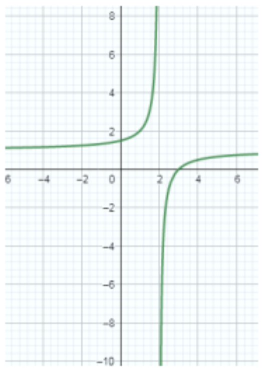
$$f(x) = x^2 + x^{2/3}$$

   en el intervalo $[-1, 1]$?

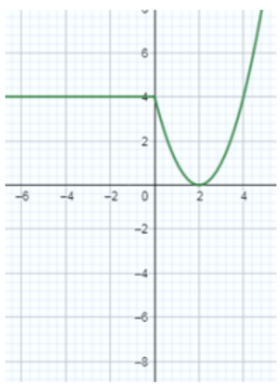
2. (oto 2018) Supongamos que $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ es continua en $[-3, 2]$ y diferenciable en $(-3, 2)$. Si además $-3 < f'(x) < 2$ para toda $x \in (-3, 2)$ demuestra que $-5 < f(2) - f(-3) < 15$

3. (Prim 2018) ¿Se puede aplicar el TVM en el intervalo $[0.5, 3]$ para cada una de las siguientes funciones? Justifica

a)



b)



4. (Prim 2018) La función $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ determina el precio de la acción de la empresa WW donde x representa el precio del dólar. Verifica que f satisface las hipótesis del TVM y encuentra un valor c en el intervalo $[1, 6]$ cuya existencia queda establecida por el teorema.