

EJERCICIOS PRIMER DEPARTAMENTAL (POR TEMAS)

02/08/2024

AVISO IMPORTANTE: En el siguiente documento encontrarás ejercicios de diferentes exámenes correspondientes al primer departamental (aplicados en distintos semestres de Primavera 2017 a Otoño 2022). Recuerda que esto NO es una lista exhaustiva del tipo de ejercicios que pueden venir en un departamental.

I. Dominio de funciones o expresiones

1. (Prim 2017) Determina el dominio de h si

$$h(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{9-x}}\right)$$

y f es una función cuyo dominio es el intervalo $[1, \infty)$

2. (Prim 2018) Para la función $f(x) = \frac{x}{2x-8}$
Obtén su dominio, el dominio de $f \circ f$ y la regla de correspondencia de dicha composición.
3. (Oto 2018) Obtén el dominio de la función $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{x+4}}$
4. (Oto 2018) Considera las funciones:

$$f(x) = 2x - 3 \text{ para } -2 \leq x < 6$$

$$g(x) = 3x - 5 \text{ para } -1 < x \leq 2$$

Determina el dominio de la composición $f \circ g$ y escribe su regla de correspondencia.

5. (Prim 2019) Encuentra el dominio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{1+3x}}}$
6. (Oto 2019)
- a) Determina los valores para los cuales la expresión siguiente está definida:

$$\sqrt{3x^2 + 11x}$$

- b) Resuelve la desigualdad

$$-4 \leq \sqrt{3x^2 + 9x} \leq \sqrt{6}$$

7. (Oto 2019) Sean f y g funciones tales que:

$$g : [1, 7) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x+5| \text{ para } -8 \leq x < 0$$

Determina el dominio de la composición $g \circ f$

8. (Prim 2020) Sea $f : (-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Determina el dominio de

$$h(x) = \frac{f(|2x+1|)}{2x^2 + 3x - 5}$$

9. (Oto 2020) Considera las funciones:

$$f(x) = 4 - 3x \text{ con } -3 < x \leq 5$$

$$g(x) = \sqrt{5 - x} \text{ con } -17 < x \leq 1$$

Determina el dominio de $f \circ g$

10. (Prim 2021) Si el dominio de f es $[0, 1]$, ¿cuál es el dominio de g si $g(x) = f\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}f\left(x + \frac{1}{4}\right)$?

11. (Prim 2022) Si el dominio de $f(x)$ es $[-2, 4]$, obtenga el dominio de h si $h(x) = \frac{f(|x - \frac{2}{3}|)}{2x - 1}$

12. (Oto 2022) Determina el dominio de la función f , si $f(x) = \sqrt{\ln(1 - 2x)}$

13. Sea $g(x) = \frac{1}{x - 4}$ para $x > 4$, y sea $h(x) = \frac{x^2}{x - 1}$.
Determina el dominio de $h \circ g$.

II. Calcular límites

1. (Prim 2017) Calcula los siguientes límites o demuestra que no existen

a)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x + 2|(x + \pi)}{4 - x^2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{2a}}{x - a}$$

2. (Prim 2018) Calcula los siguientes límites. Si alguno no existe explica por qué no

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2 + 13}}{x - 5}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{|x - 3|}$$

3. (Oto 2018) Calcula los siguientes límites mostrando todos los pasos

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2\sqrt{9x^2 + 5}}{x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{|4 - x|}{x^2 - x - 12}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

4. (Prim 2019) Calcula los siguientes límites. Si alguno no existe explica por qué no

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 81}}{4 - 9x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x + 1}{1 - |2x^3 + x^2|}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{4x}$$

5. (Oto 2019) Calcula los siguientes límites

a)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-5} - 1}{x^2 + x - 12}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^{-1} - 3^{-1}}{x-3}$$

6. (Prim 2020) Calcula los siguientes límites. Si alguno no existe explica por qué

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{7} \sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{|x-3|}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{4x}$$

7. (Oto 2020) Calcula los siguientes límites. Si alguno no existe explica por qué

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+1} - 1}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x-3|}$$

8. (Prim 2021) Justifica, mostrando todos los pasos, la existencia de los límites y en caso de que alguno no exista explica cuidadosamente tu respuesta.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{|1-x|}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x-3} - 3}{\sqrt{2x+1} - 3}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x \sin(x+2)}{3x^2 + 8x + 4}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^2 + 19x - 4}{x+4}$$

9. (Prim 2022) Justifica, mostrando todos los pasos, la existencia de los límites y en caso de que alguno no exista explica cuidadosamente tu respuesta.

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x^2 - x - 6}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}{x^2}$$

10. (Prim 2022) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2 & \text{si } x \neq 4 \\ 3 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

a) Calcula el $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ (0.25 puntos)

11. (Oto 2022)

a) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

b) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 5 + \frac{|x|}{x}$$

c) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\cos(bx)},$$

donde a y b son constantes.

III. Teorema del sándwich

1. (Prim 2017) Demuestra que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Recuerda que f es acotada si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Ayuda: expresa primero la desigualdad $|f(x)| \leq M$ de forma equivalente sin emplear valores absolutos.

2. (Oto 2022) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

si sabemos que la desigualdad

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

Justifica tu respuesta.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$$

IV. Asíntotas

1. (Prim 2017) Determina las asíntotas horizontales y verticales de

$$f(x) = \frac{5x^2}{9 - x^2}$$

Justifica plenamente tu respuesta con el cálculo de los límites involucrados. Emplea esta información para hacer un bosquejo de la gráfica de esta función

2. (Prim 2018) Determina todas las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$. Justifica con el cálculo de los límites si lo son y si hay algún agujero en la gráfica.

3. Encuentra todas las asíntotas de $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - x - 2}$. Justifica ampliamente tu respuesta con el cálculo de los límites y determina si hay un agujero en la gráfica

4. (Prim 2019) Determina todas las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 4}$. Justifica ampliamente tu respuesta con el cálculo de los límites y determina si hay un agujero en la gráfica.

5. Determina las asíntotas, si las hay, tanto verticales como horizontales de f . Justifica tu respuesta a través del cálculo de los límites involucrados

$$f(x) = \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

6. (Prim 2020)

a) Determina el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x - 1}$

b) ¿Tiene asíntotas verticales la gráfica de la función? De ser así determina su ecuación y justifica ampliamente tu respuesta con límites.

c) ¿Tiene asíntotas horizontales la gráfica de la función? De ser así determina su ecuación y justifica ampliamente tu respuesta con el cálculo de los límites.

7. Para la función

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$$

a) Determina todas las asíntotas de f y si hay un agujero (hueco) en la gráfica. Justifica tu respuesta con el cálculo de límites.

b) Esboza la gráfica de f .

8. (Prim 2021) Encuentra todas las asíntotas y determina si hay un agujero, en la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8}$$

9. (Prim 2022) a) Encuentra el dominio de $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 7x^2 + 10x}$

b) Determina si hay asíntotas horizontales. Justifica con límites.

c) Encuentra todas las asíntotas verticales y las coordenada(s) de los hueco(s) si lo(s) hay. Justifica usando límites.

10. (Oto 2022) Sea $f(x) = \frac{7x^2 + 5}{x^2 - 2x - 3}$

a) Determina el dominio de f

b) Determina si la gráfica de la función f tiene asíntotas horizontales, verticales, oblicuas. Determina si la gráfica tiene un hueco. Justifica usando límites

V. Esbozo de gráficas con ciertas características

1. (Prim 2020) Esboza lo más claramente posible la gráfica de una función que cumpla todas y cada una de las propiedades siguientes:

- $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- $f(-1) = 0$
- $f(0) = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

VI. Continuidad

1. (Prim 2017) Un asesor del Secretario de Hacienda propone que el precio de la gasolina Magna se actualice cada semana de acuerdo a la fórmula

$$p(x) = \begin{cases} 0.6x & \text{si } x < 30 \\ 18.50 & \text{si } x = 30 \\ 6 + 0.4x & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

donde x es el precio del barril de crudo.

- a) ¿Existe el límite de $p(x)$ cuando x tiende a 30?. Justifica tu respuesta.
 b) ¿Es continua la función de precios que presenta el asesor? Justifica tu respuesta.

2. (Prim 2018) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -4 - x & \text{si } x < -4 \\ 2 & \text{si } x = -4 \\ \sqrt{x+a} & \text{si } x > -4 \end{cases}$$

- a) Calcula el valor de a para que el límite de $f(x)$ exista cuando x tiende a -4 .
 b) ¿Es la función continua en -4 ? ¿Por qué?

3. (Oto 2018) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < -2 \\ bx + 2a & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determina el valor de a y b para que la función sea continua en todos los reales. Debes justificar tu respuesta.

4. (Prim 2019) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 4x + b & \text{si } x < -1 \\ bx - a & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2a - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b para los cuales la función es continua en todos los reales. Justifica ampliamente tu respuesta.

5. (Oto 2020) Clasifica las discontinuidades y justifica formalmente (con límites) tu respuesta

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ 7 - 2x & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

6. (Prim 2021) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \neq 5 \\ 10 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica con cálculos tus respuestas:

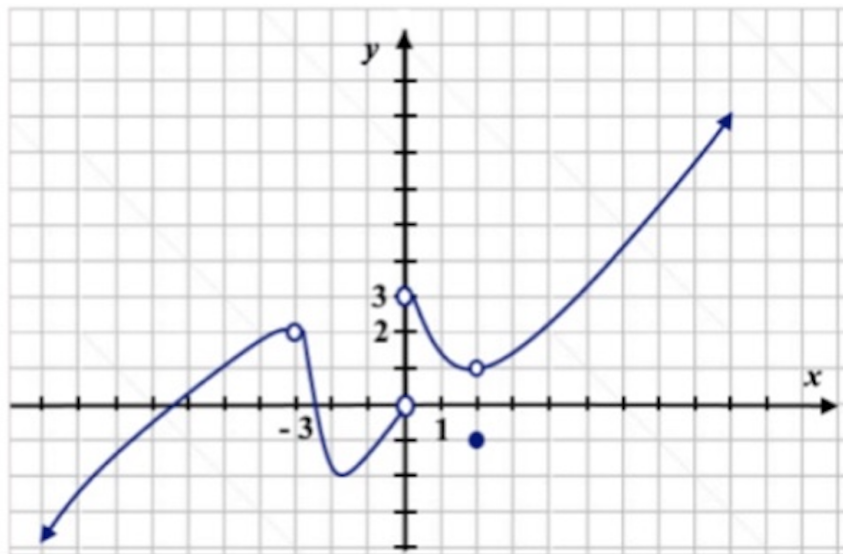
- a) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ no existe.
 b) f es continua en $x = 5$.
 c) La recta $x = 5$ es una asíntota vertical de la gráfica de f .

7. (Prim 2022) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x + a & \text{si } x < -2 \\ b & \text{si } x = -2 \\ ax^2 - 3 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Determina el valor de a y el de b para que la función sea continua en $x = -2$. Justifica usando límites y la definición de continuidad.

8. La gráfica de la función f es



Determina si la función es continua para cada valor de x dado. En caso de no ser continua en ese valor, determina qué tipo de discontinuidad tiene y si es posible redefinir la función para que sea continua en ese valor de x . (No olvides justificar tus respuestas.)

- $x = -3$
- $x = 0$
- $x = 2$

VII. Teorema del valor intermedio / Teorema de Bolzano

1. (Oto 2020)

- a) Enuncia el Teorema del Valor Intermedio
- b) Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución.