ITAM

CALCULO 1

EJERCICIOS DE EXÁMENES FINALES

> AVISO IMPORTANTE: En el siguiente documento encontrarás ejercicios de diferentes examenes correspondientes al examen final (aplicados en distintos semestres de Primavera 2020 a Otoño 2022). Recuerda que esto NO es una lista exhaustiva del tipo de ejercicios que pueden venir en un departamental.

I. DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

1. (Oto 2022) Calcula $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2e^{5y} = \ln(2xy^3)$
2. (Oto 2022) Determina $f'(x)$ si
$$f(x) = \frac{(x+1)^{2022}(2x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}}$$
3. (Prim 2022) Usando derivación logarítmica, determina y' si $y = \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$
4. (Oto 2020) Usa derivación logarítmica para obtener $\dfrac{dy}{dx}$ si
$$y = \left(\sqrt{\frac{1+x}{(1-x)^{10}(1-4x)x^3}}\right)^{\frac{1}{5}}$$
5. (Oto 2020) Usa derivación logarítmica para calcular la derivada de $f(x) = x^{2x}$

II. LINEALIZACIÓN

1. (Oto 2022) Estima el valor de $\sqrt[3]{8.1}$
2. (Prim 2022) Sea f una función continua y diferenciable en todos los reales.
Si $f(1) = 5$ y $f'(1) = -2$, utiliza la linealización alrededor de $x = 1$ para estimar el valor de $f(1.2)$
3. (Oto 2020) Usa linealización para obtener, (escrito en forma de fracción) el valor aproximado de $\sqrt[3]{7.8}$
4. (Prim 2020) Sea $f(x) = ln(2x+1)$
   a) Determina la linealización de la función f alrededor de $x = 0$.
   b) Utilizando el inciso anterior, da una aproximación del valor $\ln(1.2)$

III. GRAFICACIÓN

1. (Oto 2022) Sea
$$f(x) = \frac{3e^x}{e^x+1}$$
   a) Determina el dominio de la función, y las intersecciones de la gráfica con los ejes (en caso de no tener especificarlo)
   b) Determina si la gráfica tiene asíntota horizontal, asíntota vertical y justifica tu respuesta usando límites.

c) Determina los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función. Especifica si la función tiene extremos (es decir máximos y/o mínimos).

d) Determina los intervalos de concavidad/convexidad de la gráfica de la función. Especifica si tiene puntos de inflexión.

e) (Oto 2022) Dibuja la gráfica de la función. En dicha gráfica deberás escribir las coordenadas de los puntos importantes.

f) (Prim 2022) Esboza la gráfica de g si la función g cumple todo lo siguiente:

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{5\}$
- $g(x) < 0$ para toda $x < 5$ y $g(x) > 0$ para toda $x > 5$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
- $\lim_{x\to5^-} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to5^+} g(x) = \infty$
- $g'(6) = 0$
- $g'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 5) \cup (5, 6)$ y $g'(x) > 0$ para $x \in (6, \infty)$
- $g''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 5)$ y $g''(x) > 0$ para $x \in (5, \infty)$

2. (Oto 2022) Esboza la gráfica de una función g que cumple todo lo siguiente:

- El dominio de g es $\mathbb{R}$
- $g(x) < 0$ para toda $x < 10$, $g(x) > 0$ para toda $x > 10$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -4$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
- $g'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$, $g'(x) < 0$ para $x \in (0, 5)$
- $g'(0) = 0$ y $g'(5) = 0$
- $g''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $g''(x) < 0$ para $x \in (-1, 1)$, $g''(-1) = g''(1) = 0$

3. (Prim 2022) Sea
$$f(x) = e^{-x^2}$$

a) Determina el dominio de la función, y las interseciones de la gráfica con los ejes (en caso de no tener especificarlo).

b) Determina si la gráfica tiene asíntota horizontal, asíntota vertical y justifica tu respuesta usando límites.

c) Determina los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función. Especifica si la función tiene extremos (es decir máximos y/o mínimos).

d) Determina los intervalos de concavidad/convexidad de la función. Especifica si tiene puntos de inflexión.

e) Dibuja la gráfica de la función. En dicha gráfica deberás escribir las coordenadas de los puntos importantes.

4. (Oto 2020) Para la función
$$f(x) = \frac{3}{1 - e^{-x}}$$
, determina

a) Dominio

b) Intersecciones con los ejes

c) Intervalos donde f es positiva y donde es negativa

d) Asíntotas

e) Puntos críticos si los hay

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

g) Puntos extremos locales y globales si los hay

h) Intervalos de concavidad y convexidad

i) Puntos de inflexión, si los hay

j) Grafica

5. (Prim 2020) Considera $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$. Si sabemos que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

   a) Da el dominio de $f(x)$

   b) Encuentra las asíntotas de la gráfica de f

   c) Da los intervalos donde la función es decreciente, los intervalos donde es creciente y los extremos de la función.

   d) Da los intervalos de concavidad de la función.

   e) Usa la información anterior para dar la gráfica de la función. Etiqueta cada punto relevante.

IV. FUNCION EXPONENCIAL Y/O LOGARITMO, PROPIEDADES

1. (Oto 2022) Sea $f(x) = 5 - \ln(e^x + 3)$

   - Determina el dominio de f
   - Demuestra que la función es decreciente
   - Determina f^{-1}

2. (Prim 2022) Resuelve la ecuación $5e^{-x} = 3 - 6e^{-x}$

3. (Oto 2020) Da las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función

$$f(x) = \ln(2x^2 - 2)$$

   en el punto $x = 3$

4. (Oto 2020) Dada $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ obtén $(f^{-1})'(x)$

5. (Prim 2020)

   Verdadero o falso (no es necesario justificar)

   a) Al resolver una ecuación, siempre puede dividirse entre e^x.

   b) Si $0 < a < b$ entonces $\ln a < \ln b$.

   c) Si $x > 0$ entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$

   d) Si $x > 0$ y $a > 1$ entonces $\frac{\ln x}{\ln a} = ln\left(\frac{x}{a}\right)$

6. (Prim 2020) Sea $f(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x}$

   a) Determina $f'(x)$

   b) Calcula $(f^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)$ usando el Teorema de la derivada de la función inversa.

   c) Obtén explícitamente $f^{-1}(x)$

   d) Usa el resultado del inciso anterior para obtener $(f^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)$ directamente y confirma el resultado obtenido en el inciso b)

V. OPTIMIZACIÓN

1. (Oto 2022) Un alambre que mide L metros se dobla para formar un rectángulo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima?

2. (Prim 2022) Se define:

   - $r(x) =$ el ingreso en dólares por la venta de x cientos de tarjetas de videojuegos
   - $c(x) =$ el costo en dólares de producir x cientos de tarjetas de videojuegos

- $u(x) = r(x) - c(x)$ la utilidad en dólares por producir y vender x cientos de tarjetas de videojuegos.

Si $r(x) = 15x$ y $c(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ ¿Cuál debe de ser el nivel de producción para maximizar la utilidad? Justifica que en efecto se trata de un máximo.

3. (Oto 2020) Escribe las coordenadas del punto de la gráfica de f en el que hay un extremo local (o relativo).

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{3x}$$

VI. OPTIMIZACION EN INTERVALO CERRADO

1. (Prim 2022) Determina el máximo global y el mínimo global de la función $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-8, 1]$.