Segundo Parcial Departamental . Cálculo Diferencial e Integral III.
Otoño 2023

NOMBRE:____ CU:________

NOMBRE DEL PROFESOR:____

i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).

Examen Tipo A. Duración: 2 horas

1. Demuestra que no existe una función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f=f(x,y,z)$, de clase C^3 cuya matriz hessiana sea $\begin{pmatrix} 2 & x & 1+y \\ x & y & 1+z \\ 1+y & 1+z & z \end{pmatrix}$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

2. Dada $f(x,y)=x^3-4xy+2y^2+1$, encuentra sus puntos críticos y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable. Sean $\vec{v}_1=(3/5,4/5)$, $\vec{v}_2=(4/5,-3/5)$. Si las derivadas direccionales de f en el punto (x_0,y_0) en las direcciones de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ valen 5 y -5 respectivamente, determina la dirección de máximo crecimiento de f en el punto (x_0,y_0).

4. Encuentra un vector no nulo y normal a la superficie descrita por $e^{xy+yz}-1=\operatorname{sen}(xz+4y)$, en el punto $(2,1,-2)$.

5. Encuentra todos los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuales la matriz $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -1+x & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, es definida negativa.

6. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(2,1)=-3$ y $\nabla f(2,1)=(2,-3)$. Dada la curva en el plano xy descrita por la ecuación $x^2y-y+f(x,y)=0$, encuentra un vector tangente a dicha curva en el punto $(2,1)$.

7. Supón que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es de clase C^2. Sea $w=f(x,y)$ y sean $x=r\cos(\theta)$, $y=r\operatorname{sen}(\theta)$. Demuestra que
$$\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial r}=-\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}+r\cos(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{r}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right).$$
Recordar: $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)$, $\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$.