Primer Parcial Departamental . Cálculo Diferencial e Integral III.
Otoño 2023

NOMBRE:____ CU:________

NOMBRE DEL PROFESOR:____

i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).

Examen Tipo A. Duración: 2 horas

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Demuestra que la derivada de $\mathbf{F}$ en $\vec{x}$, denotada por $\mathrm{D}\mathbf{F}(\vec{x})$, es A para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

2. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $g = g(x, y)$, tal que $g(1, 2) = -3$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 2) = 2$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 2) = -1$. Sea $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2y, xg(x, y) + y^2)$. Encuentra $\mathrm{D}\mathbf{F}(1, 2)$.

3. Sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2 + t + 1, t^3 - t)$, $t > 0$.

   (a) Calcula $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ como función de t.

   (b) Calcula $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ en el valor de $t > 0$ tal que $(x(t), y(t)) = (3, 0)$.

4. Determina el punto donde la recta tangente a la curva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t^3 + t, t^2 - 1, t + 4)$ en $t = 1$, intersecta al plano xy.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(2, -1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, -1) = -5$, y además, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(2, -1 + h) - f(2, -1)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h, -1) - f(2, -1)}{h}$. Encuentra la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, -1, 3)$.

6. Usa la regla de la cadena (o una fórmula derivada de dicha regla en varias variables) para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ en el punto $(s, t) = (1, 1)$, si $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + y)$, $x = s - t^2$, $y = t - s^2$. (No se dará crédito a otros métodos)

7. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x - y$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentra los puntos en $\mathbb{R}^2$ que están tanto en la curva de nivel de f como en la de g correspondientes al valor $c = 1$.