Examen Final Departamental. Cálculo Diferencial e Integral III.
Otoño 2023

NOMBRE :____ CU :________

i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).
Duración: 2 horas 45 minutos

1. Encuentra el valor de
$$\iint_D \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - x\right) dxdy,$$
donde $D = \{(x,y) \mid 4 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$.

2. Sea $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{T}(r,\theta,z) = (r\cos(\theta), r\text{sen}(\theta), z)$. Demuestra que $\det(\mathrm{D}\mathbf{T}(r,\theta,z)) = r$, donde $\mathrm{D}\mathbf{T}(r,\theta,z)$ es la matriz jacobiana de $\mathbf{T}$ en el punto (r,θ,z).

3. Usa los multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos de $f(x,y,z) = x+y+z$. sujeta a las dos restricciones $2x+z=1$, $x^2+y^2=1$.

4. Sea D la región en el plano xy encerrada por las curvas $y = x+1$ y $y = 1-x^2$. Encuentra el valor de $\iint_D x\, dxdy$.

5. Encuentra el valor de $a > 0$ tal que $\iiint_{D_a} (x+y) dxdydz = a$, donde D_a es el paralelepípedo en el espacio xyz dado por $[0,a] \times [0,a] \times [0,4]$.

6. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x,y) = (x^3 - xy, y^3 + xy)$.
   a) Muestra que $\mathbf{F}$ es inyectiva en algún abierto que contiene al punto $(2,1)$.
   b) Sea U un abierto que contiene al punto $(2,1)$ tal que $\mathbf{F}$ es inyectiva en U. Si $\mathbf{G}$ es la inversa de $\mathbf{F}$ restringida a U y dado que $\mathbf{F}(2,1) = (6,3)$, calcula $\mathrm{D}\mathbf{G}(6,3)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - \dfrac{y^2}{4}$.
   a) Encuentra la razón de crecimiento de f en el punto $(1/2, 2)$ en la dirección del vector $(2,3)$.
   b) Demuestra que no existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que la razón de crecimiento de f en el punto $(1/2, 2)$ en la dirección de $\vec{v}$ sea 2.