

**ITAM, Departamento Académico de Matemáticas**  
**Examen final (parte escrita), diciembre de 2023**  
**Álgebra Superior 2/Matemáticas Discretas**

1. Sean  $a, b, m$  y  $n$  números reales. Si el número  $\frac{a + bi}{m + ni}$  es real, demuestra que  $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ .
2. Sea  $\mathbb{F}$  un campo y sean  $p(x)$  y  $q(x)$  polinomios en  $\mathbb{F}[x]$ . Demuestra que si  $\alpha \in \mathbb{F}$  es una raíz de  $p(x)$  y de  $q(x)$ , entonces  $\alpha$  es una raíz del máximo común divisor de  $p(x)$  y  $q(x)$ .
3. Una persona visitó 8 ciudades europeas y en cada una compró un llavero con el escudo de armas de la ciudad, para repartir entre sus 5 amigas.
  - a) ¿De cuántas maneras puede repartir los llaveros?
  - b) ¿De cuántas maneras puede repartir un solo llavero a cada amiga?
4. Considera un conjunto de 25 países. Algunas parejas de países hacen tratados de libre comercio entre ellos (solo entre dos países), y otros no. Demuestra que es imposible que cada país tenga exactamente 7 tratados con otros países.