

Cálculo Diferencial e Integral I  
Departamento de Matemáticas, ITAM  
Tercer Examen Departamental  
Lunes 13 de Noviembre del 2023

Nombre: \_\_\_\_\_

cu: \_\_\_\_\_

|    |    |   |    |    |   |   |
|----|----|---|----|----|---|---|
| 1a | 1b | 2 | 3a | 3b | 4 | 5 |
|----|----|---|----|----|---|---|

.....  
JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS  
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS  
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas  
Tiempo: 2:00 horas  
.....

1. Considera la función  $f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10$  con el parámetro real  $a \neq 0$ .

- a) (1.0 punto) Encontrar los valores de  $a$  para los cuales la función  $f(x)$  alcanza un máximo relativo en  $x = 1$ .

b) (0.75 puntos) Calcular los extremos relativos de  $f(x)$  para  $a = 3$ .

2. (1.75 puntos) Una persona  $A$  está sobre un trampolín, a una altura de 30m, lista para saltar a una piscina que está al nivel del piso. Al nivel del piso también está un observador  $B$ , a una distancia de 50m de la persona  $A$ . Si la persona  $A$  se deja caer del trampolín y a la altura de 10m lleva una velocidad de caída de 10m/s, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de visión del observador  $B$  en ese momento?

3. a) (0.5 puntos) Enuncia el teorema del valor medio.

b) (1.5 puntos) Considera la función  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, derivable en  $(1, 2)$ . Muestra que si  $f(1) = 1$  y  $f'(x) < 3$  para toda  $x \in (1, 2)$  entonces  $f(2) < 4$ .

4. (2 puntos) Muestre que la ecuación

$$2x - 1 - \operatorname{sen}(x) = 0$$

tiene una única solución real.

5. (2.5 puntos) Dibuja la gráfica de la función  $f(x) = x^{5/3} - x^{2/3}$  considerando los siguientes puntos:

- dominio,
- intersección con los ejes,
- puntos críticos e intervalos de monotonía,
- máximos y/o mínimos locales,
- intervalos de concavidad,
- puntos de inflexión,
- asíntotas.