Cálculo Diferencial e Integral I
Departamento de Matemáticas, ITAM
Segundo Examen Departamental
Miércoles 25 de Octubre del 2023

Nombre: ______________________________ cu: __________

1	2	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7

JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas
Tiempo: 2:00 horas

1. (1.25 puntos) Para $y = \sqrt{x^2+1}$, calcula $\dfrac{dy}{dx}$ en $x = 1$ utilizando la definición de derivada.

2. (1.25 puntos) Dada una función derivable que cumpla $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, determina $f'(1)$.

3. a) (0.5 puntos) Enuncia el Teorema de Bolzano (no hay crédito parcial).

b) (1 punto) Prueba que la función

$$f(x) = x + x^{2004}(x-1)^{2023}$$

toma el valor $1/2$ para algún $x \in \mathbb{R}$.

4. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}, & x > 1, \\ ax + b, & x \leq 1, \end{cases}$$

donde a y b son parámetros reales.

a) (0.75 puntos) Muestra que se requiere $a + b = 2$ para que la función sea continua en todo su dominio.

b) (0.75 puntos) Prueba que $a = 1/2$ y $b = 3/2$ son los únicos valores con los que la función es derivable en todo su dominio.

5. Calcula la derivada de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado, no hay crédito parcial):

   a) (1 punto) $f(x) = \operatorname{sen}^4\left(x\sqrt{x^2-1}\right) + \cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

   b) (1 punto) $g(\theta) = \tan\left(\sqrt{\operatorname{sen}^3(\theta) + \cos^3(\theta)}\right)$

6. Considera funciones derivables f y g las cuales cumplen $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$, $g(3) = 4$, $g'(3) = 2$.

a) (1 punto) Calcula $h'(x)$ si $h(x) = (\sqrt{g \circ f})(x)$.

b) (0.25 puntos) Utiliza el inciso anterior para determinar $(\sqrt{g \circ f})'(0)$.

7. (1.25 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la expresión

$$y + \frac{xy}{1+y} = \frac{8}{3}$$

en el punto $(1, 2)$.