

**Cálculo Diferencial e Integral II**  
**Segundo Examen Departamental**

Nombre: \_\_\_\_\_ Clave: \_\_\_\_\_ 21/10/2022

JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS

Tiempo: 2 horas

---

1. (1.0 punto)

1.1 (0.2 puntos) Escribe la definición formal del límite  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

1.2 (0.8 puntos) A partir del inciso anterior demuestra formalmente que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

2. (1.5 puntos) Demostrar que existen por lo menos dos soluciones reales distintas de la ecuación

$$\cos^2(x) - 3x^2 = -\operatorname{sen}(x).$$

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones (**no es necesario simplificar** pero no hay crédito parcial):

3.1 (1 punto)

$$f(x) = \tan^3(\cos(3x))$$

3.2 (1 punto)

$$g(x) = \sqrt{(1 - 7x)^2 + \sqrt{7x - 1}}$$

3.3 (1 punto)

$$h(t) = \left( \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right)^{2022}$$

4. (1.25 puntos) Considera la curva, que define implícitamente a  $y$  como función de  $x$ ,

$$\cos(y) + \operatorname{sen}(xy) = 2x^3 + 3x^2.$$

- a) (0.75 puntos) Calcula  $y'(0)$  en  $P = (0, \frac{\pi}{2})$ .
- b) (0.25 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto  $P$ .
- c) (0.25 puntos) Determina la ecuación de la recta normal a la curva en el punto  $P$ .

5. (1.25 puntos) Considere una función  $f$  diferenciable y distinta de cero en su dominio. Demostrar usando la definición de derivada que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{f(x)} \right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

6. (2.0 puntos) Determinar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  de tal forma que la función

$$f(x) = \begin{cases} 5 + \sqrt{2x} & \text{si } x \in (0, 8], \\ \beta x + \alpha & \text{si } x \in (8, \infty), \end{cases}$$

- a) (1 punto) sea continua en  $x = 8$ ,
- b) (1 punto) sea diferenciable en  $x = 8$ .